

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_232824**

UNIVERSAL  
LIBRARY









# خزائنِ قدس

پہلا اور دوسرا مقالہ  
مشرح و ۵۶ سوالات

جسکو

منشی جی فیض آباد کیمین صاحب ایم کے دیگر سابق شریعت تعلیم مالک مغربی و شمالی

بابو آتمارام نے لے پٹنہ ماسٹر گورنمنٹ ہائی اسکول تھرا

نے

بغرض فائدہ طلبہ انارمل اسکول و مدارس تحصیل و حلقہ بندی کے

عمدہ عمدہ انگریزی کتابوں سے  
تالیف کیا

دستخط اسی واقع می گھاٹ پتہ منشی رام نرائن طبع گردید

حق تالیف — — محفوظ ہے

۱۸۸۲ء



## PREFACE.

---

In thus presenting to students and teachers a new elementary work in Urdu on the Principles of Geometry, it can hardly be necessary to defend the having made Euclid's Elements the basis of the work. For while it cannot be denied that many defects and difficulties occur in the Elements, and that these become more obvious the more closely we examine the work, it must, on the other hand, be acknowledged that notwithstanding the numerous attempts which have been made by our best modern geometers to find an appropriate substitute, the "Elements" of Euclid has ever held the chief place in our Universities and Colleges, and is never likely to be superseded. Nearly every official programme of instruction or examination expressly includes some portion of this time-honoured work.

The present edition of Euclid's Elements is prepared especially for those studying for the Normal School Certificate and the Middle Class Vernacular Examinations in the North-Western Provinces and Oudh. It differs in several important particulars from other editions of the same work intended to be used as text books in the Vernacular schools of India. *First*, the style has been simplified as far as possible by discarding much of the usual technical phraseology, and in places where this has been necessarily retained, copious explanations have been added, especially in the Definitions. A list of all the technical terms used in the work together with their English and Hindi equivalents is also attached. *Secondly* many new and simpler Demonstrations of the Propositions have been given, *in addition* to those of Euclid, in order to bring the subject within the comprehension of different capacities. In not a few cases where Euclid has given, only the indirect method of proof or what is called *Reductio ad absurdum* (—the method generally employed by Euclid for the demonstration of converse propositions)—a direct method of proof which is more satisfying and more convincing to the student has been appended. *Thirdly* to almost all the propositions, there have been added new Corollaries, Exercises and Annotations of various kinds, tending to render the additions a species of short running commentary on the immortal work of Euclid. *Fourthly*, in order to remove one of the most practical objections which have been urged against the Elements, namely, its want of methodical arrangement, a classified index has been appended by means of which all the propositions in the Elements relating to any particular subject may be immediately found.

In conclusion I must not omit to mention the principal works which have been consulted, and to which the present edition is mainly indebted for any advantages which it may possess over its rivals in the same field. The works referred to are the editions of the Elements by Todhunter, Potts, Wallace, Playfair, Smith and Law.

It only remains for me to offer my thanks to the friends who have helped me with their advice in the preparation of this work, and to assure each student and teacher that any suggestion for its improvement will be thankfully received by me.

Muttra.

January, 1882.

A. R.

# اصطلاح

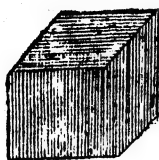
انگریزی	ہندی	اردو
Definitions	परिभाषा	حدود
Dimension	विस्तार	امتداد
Point	बिन्दु	نقطہ
Locus	निधि	مقام النقط
Line	रेखा	خط
Straight line	सीधी या सरल रेखा	خط مستقیم
Parallel straight lines	समानान्तर सीधी रेखा	خطوط مستقیم متوازیہ
Curve	वक्र या कुटिल रेखा	خط منحنی
Superficies	धरातल	سطح
Plane superficies	दर्पणीदर धरातल	سطح مستوی
Solid	पिंड	جسم
Plane angle	कोण	زاویہ
Plane rectilineal angle	सरल कोण	زاویہ مستقیم
Right angle	समकोण	الخطین زاویہ قائمہ
Obtuse angle	अधिक कोण	زاویہ منفرجہ
Acute angle	न्यूनकोण	زاویہ حادہ
Re-entering angle	पुनर्युक्तकोण	زاویہ مکررہ
Adjacent angle	आसन्नकोण	زاویہ متصلہ
Interior angle	अन्तःकोण	زاویہ داخلہ
Exterior angle	बहिःकोण	زاویہ خارجہ
Opposite angle	सम्मुखकोण	زاویہ متقابلہ
Alternate angle	एकान्तरकोण	زاویہ متبادلہ
Supplement	पूरक	تكمه
Complement	कोटि	تمامی قائمہ
Vertex	शीर्ष	زاس
Arm	भुज	ساق

अंग्रेजी	हिंदी	अरबी
Perpendicular	लम्ब	عمود
Boundary	सीमा	حد
Figure	आकृति या चित्र	شكل
Circle	वृत्त	دائرة
Circumference	परिधि	محيط
Centre	केन्द्र	• مرکز
Diameter	व्यास	قطر
Radius	व्यासार्ध या त्रिज्या	نصف قطر
Arc	चाप	قوس
Chord	चाप कर्ण या जीवा	وتر قوس
Side	भुज	ضلع
Rectilineal figure	ऋजुभुज चित्र	شكل مستقيم الاضلاع
Triangle	त्रिभुज	• مثلث
Equilateral triangle	समत्रिवाहु त्रिभुज	• مثلث متساوي الاضلاع
Isosceles triangle	समद्विवाहु त्रिभुज	• مثلث متساوي الساقين
Scalene triangle	विषमवाहु त्रिभुज	• مثلث مختلف الاضلاع
Right-angled triangle	समकोण त्रिभुज	• مثلث قائم الزاوية
Hypotenuse	समकोण त्रिभुज का कर्ण	وتر • مثلث قائم الزاوية
Obtuse-angled triangle	अधिककोण त्रिभुज	• مثلث منفرج الزاوية
Acute-angled triangle	न्यूनकोण त्रिभुज	• مثلث حادة الزوايا
Quadrilateral figure	चतुर्भुज चित्र	شكل ذو اربعة الاضلاع
Square	वर्ग	• مربع
Oblong	आयत या जाल्पायत	مستطيل
Rhombus	विषमकोण समचतुर्भुज	• معين
Rhomboid	अजाल्पायत	شبيهه بالمعين
Parallelogram	समानान्तर चतुर्भुज	• متوازي الاضلاع
Trapezium	विषम चतुर्भुज	• منحرف
Complement	पूरक,	• متمم
Trapezoid	समलम्ब चतुर्भुज	• ذوزنقه
Polygon	बहुभुज चित्र	شكل كثير الاضلاع

अङ्ग्रेजी	हिन्दी	अरबी
Diagonal	कर्ण	وتر
Base	आधार या भूमि	قاعدة
Postulate	आवाधोपक्रम	اصل موضوعه
Axiom	स्वयंसिद्धि	علوم متعارفه
Proposition	साध्य	پیشکش
Problem	वस्तुपपाद्य या सोपपाद्य	شکل عملی
Theorem	प्रमेयोपपाद्य या उपपाद्य	شکل اثباتی یا نظری
Enunciation	प्रतिज्ञा	دعوی
Data	निर्दिष्ट	معلوم
Quaesita	करणीय	مطلوب
Hypothesis	कल्पित अर्थ	مقدم
Predicate	फल	تالی
Converse	प्रतिलोम या विलोम	عکس
Direct demonstration	अन्वययुक्त	ثبوت مثبتہ
Indirect demonstration	व्यतिरेकयुक्त	ثبوت منقیه یا ثبوت به خلف
Corollary	अनुमान	نتیجہ صریح
Superposition	अच्छादन	تطبیق
Analysis	विवेचना	تحلیل
Synthesis	पर्यालोचना	ترکیب
Gnomon	मापक	سلم
Commensurable quantities	परिमीय संख्या	مقابلہ پذیر مقادیر
Incommensurable quantities	अपरिमीय संख्या	مقابلہ نپذیر مقادیر

# دیاج

پتھ کا ٹول جو کسی چٹان سے کاٹا گیا ہو ایک مجسم یعنی ٹھوس چیز ہے جب تک  
 نے اسکو گرھکر اسکا ڈول درست کر لیا تو یہ ایک مجسم شکل بن گئی  
 اب فرض کرو کہ یہ شکل ایسی ہو کہ اس ٹول میں چہہ طرفیں ہیں جن میں سے  
 سے برابر ہیں اگر کوئی شخص کھڑا ہو کر اس ٹول کے ایک  
 کو نہ پر نظر ڈالے تو اسکو تین طرفیں جیسی کہ اس تصویر میں  
 نظر پڑتی ہیں دکھائی دین گی



اِس شکل کی ہر ایک طرف کو سطح کہتے ہیں اور جب یہہ سطح ایسی ہو اور چلنی ہو  
 کہ اس میں کہیں کچھ کھرا پن نہیں ہے تو یہہ سطح ستوی ہو  
 تیز اور پینے کنارے جہاں کوئی دو طرفیں ملتی ہیں خط کہلاتے ہیں  
 وہ جگہ جہاں کوئی تین کنارے ملتے ہیں نقطہ ہے  
 مقدار اسے کہتے ہیں جس کے کل اور ٹکڑوں دو نوں کو ایک ہی نام سے پکار سکیں  
 مثلاً خط ایک مقدار ہے کیونکہ ہم اس کے کل اور اس کے حصے ٹکڑے کو  
 خط کہتے ہیں

ہر چیز کی لمبائی اور چوڑائی اور موٹائی (یا گہرائی یا اونچائی) کو امتداد کہتے ہیں  
 اب ہم جسم اور سطح اور خط اور نقطہ کے آپس کا فرق اس طرح بیان کرتے ہیں

جسم میں تینوں امتداد ہوتے ہیں یعنی لبنائی اور چوڑائی اور موٹائی  
 سطح میں دو امتداد ہوتے ہیں یعنی لبنائی اور چوڑائی  
 نقطہ میں ایک امتداد ہوتا ہے یعنی نری لبنائی  
 نقطہ میں کوئی امتداد نہیں ہوتا ہے

**عالم** سے مراد وہ عالم ہے جس میں مقدار متصلہ یعنی جسموں اور سطحوں اور زاویوں اور  
 خطوں کی پیمائش سے بحث کی جاتی ہے اور ان کے آپس کے علائقے بیان ہوتے ہیں  
**آقلیدس** ایک بڑا مشہور ریاضی دان تھا جس نے ملک مصر میں حضرت  
 عیسیٰ کے پیشتر ۳۲۳ء اور ۲۸۳ء کے درمیان مشہرت پائی اور اسکندر یہ کے مدرسہ  
 ریاضی کی بنا ڈالی اُس نے علم ہست کی ایسی ترتیب دی کہ اُس کا نام ہی علم ہست کا  
 دوسرا نام ہو گیا +





# تحریر اقدس

## مہلہ

دو

یہ کسی چیز کی خاصیتوں کا ایسا بیان کہ آئے وہی چیز سمجھ میں آئے

۱ نقطہ وہ ہے جسکی کوئی جگہ مقرر ہو لیکن اسکے ٹکڑے ہو سکیں  
 کتابوں میں نقطہ کا یہ نشان (۰) ہی بہ نشان کننا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو تو بھی اسکے  
 ٹکڑے ہو سکتے ہیں اس سے یہ نہ سمجھنا چاہئے کہ نقطہ کے جسکا بیان اقلیدس نے کیا ہے وہ ٹکڑے ہو سکتے ہیں  
 ۲ خط نری لبنائی بنیہ چوڑائی کے ہر  
 نقطہ کے حرکت کرنے سے خط پیدا ہوتا ہی ایسے  
 ۳ خط کے سرے نقطہ ہوتے ہیں

جہاں دو خط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں وہ بھی نقطہ ہوتا ہی  
 ۴ خط مستقیم وہ خط ہے جو اپنے دونوں سروں کے بیچ ہموار واقع ہو  
 دو نقطوں کے بیچ بہت سے خط کھینچ سکتے ہیں ان میں سے وہ خط جو ان نقطوں کے بیچ ہموار واقع نہ ہو

جسکے سب حصے اسی سمت میں ہیں جو ان دو نقطوں سے پیدا ہوتی تھیں خط مستقیم برآتی اور حصے خط ہیں  
وہ سب خط منحنی کھاتے ہیں

۵ سطح وہ جس میں صرف لذائی اور چڑائی ہو

۶ سطح کے کنارے خط ہیں

۷ سطح مستوی وہ سطح ہے کہ جب پر کوئی دو نقطے لئے جائیں اور ان نقطوں کے بیچ  
خط مستقیم کھینچا جائے تو وہ خط مستقیم بالکل اس سطح میں ہو

۸ زاویہ سطح ایسے دو خط کے ایک دوسرے کی طرف جھکاؤ کو کہتے ہیں جو ایک سطح  
میں آپس میں ملتے ہیں لیکن ملکر ایک خط نہیں بناتے ہیں

زاویہ سطح دو خط منحنی یا ایک خط منحنی اور ایک خط مستقیم یا دو خط مستقیم کے ایک سطح میں ملنے  
سے پیدا ہوتا ہے جو ملکر ایک خط نہیں بناتے ہیں

۹ زاویہ سطح مستقیم ان خطوں میں اس زاویہ سطح کو کہتے ہیں جو ایسے دو خط مستقیم کے ایک  
دوسرے کی طرف جھکاؤ سے پیدا ہو جو ملکر ایک خط مستقیم نہیں بناتے ہیں۔

دو خط مستقیم کے ایک سطح میں ہونے کی قدر بجھتا ہے اس لئے نہیں کی گئی ہو کہ دو خط مستقیم جو

آپس میں ملتے ہیں ہمیشہ ایک ہی سطح میں ہوتے ہیں  
جب کسی نقطہ پر ایک ہی زاویہ ہو تو وہ ایک  
حرف سے جو اس نقطہ پر لکھا ہوا ہو بیان ہو سکتا ہے

جیسا کہ زاویہ کا ہی لیکن جب ایک نقطہ پر ایک سے زیادہ زاویے ہوں تو ان میں سے ہر ایک کو تین  
حرفوں سے اس طرح بیان کیا جاتا ہے کہ بیچ کا حرف نقطہ پر لکھا ہوتا ہے اور ایک ایک حرف ان دونوں

خط مستقیم کے جسے زاویہ بننا ہی کسی جگہ پر لکھا ہوتا ہے جو زاویہ خط ب اور س اور س اسے بنا ہی  
اوسکو زاویہ ب اور س اور س اور د اسے بنا ہی اوسکو زاویہ س اور د اور د

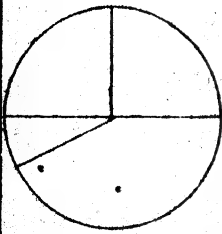
زاویہ خط ب اور د اسے بنا ہی اوسکو زاویہ ب اور د کہتے ہیں

جہن خطوں سے زاویہ بنائی گئے کھینچنے سے زاویہ  
 کہتا ہوتا نہیں ہے جیسا اب اس اور دایہ ایک لڑی  
 جس نقطہ پر زاویہ بنانوالے خط ملتے ہیں اسکو زاویہ کلاس اور ان خطوں میں سے ہر ایک کے زاویہ  
 کی ساق کہتے ہیں

۱۰ جب ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر کھڑا ہو کر اپنے دونوں  
 پہلوؤں کے زاویے جنکو زاویہ متصل کہتے ہیں برابر بنا دے تو ان اوپوں  
 میں سے ہر ایک کو زاویہ قائمہ کہے گا خط مستقیم کو دوسرے خط مستقیم پر عمود کہتے ہیں  
 ۱۱ زاویہ منفرج وہ زاویہ ہے جو زاویہ قائمہ سے بڑا ہو  
 ۱۲ زاویہ حادہ وہ زاویہ ہے جو زاویہ قائمہ سے چھوٹا ہو

اگر کسی زاویہ کی ایک ساق زاویہ کی دوسری ساق کے برابر ہو تو ایک دوسرا زاویہ پیدا ہوگا  
 یہ زاویہ پہلے زاویہ کے برابر یا اس سے چھوٹا یا بڑا ہوگا اگر برابر ہی تو پہلا زاویہ قائمہ اور اگر چھوٹا ہو تو  
 منفرج اور اگر بڑا ہو تو حادہ کہلاوے گا

۱۳ حد کسی چیز کو کہتے ہیں  
 ۱۴ شکل وہ ہے جو ایک یا زیادہ حد گھری ہو  
 ۱۵ دائرہ وہ شکل سطح ہے جو ایک خط سے جسکا نام محیط  
 ہے گھری ہو اور اس کے اندر ایک خاص نقطہ ایسا ہو جسے خط مستقیم  
 اس نقطہ سے محیط تک کھینچے جاوے وہ سب آپس میں برابر ہوں



۱۶ اور یہ نقطہ اس دائرہ کا مرکز ہے  
 ۱۷ دائرہ کا قطر وہ خط مستقیم ہے جو مرکز پر سے گزرے اور جس کے دونوں سر محیط پر ہوں  
 جو خط مستقیم کسی دائرہ کے اس کے محیط تک کھینچا جائے اسکو اس دائرہ کا نصف قطر کہتے ہیں  
 اگر ایک خط مستقیم اپنے ایک سر سے کسی سطح مستوی میں گہم کر اپنی اصلی جگہ پر

لوٹ آوے تو سطح سپرہ خط گواہی اسکو دائرہ کہتے ہیں اور وہ خط جو مستقیم کے دو سرے سرے کے نقطہ کی حرکت سے پیدا ہوا ہی دائرہ کا محیط کہلاتا ہے اور گواہی منے والے خط مستقیم کو دائرہ کا نصف قطر اور پھرے ہوئے سرے کے نقطہ کو دائرہ کا مرکز کہتے ہیں +

۱۸ نصف دائرہ وہ شکل مستوی ہے جسکو قطر اور محیط کے اس حصے جو قطر سے کٹا ہی گھرا ہو +

۱۹ قطعہ دائرہ وہ شکل ہے جسکو کسی خط مستقیم اور محیط کے اس حصے جو اس خط مستقیم سے کٹا ہی گھرا ہو



قطعہ دائرہ کا پہلے اور دوسرے متعادلیں کہیں کام نہیں پڑا ہی نصف دائرہ قطعہ دائرہ ہے لیکن ہر قطعہ نصف دائرہ نہیں ہے +

۲۰ شکل مستقیم الاضلاع وہ شکل ہے جو مستقیم خطوط سے گھری ہو

۲۱ مثلث وہ شکل ہے جو تین مستقیم خطوط سے گھری ہو

۲۲ شکل ذو اربعۃ اضلاع وہ شکل ہے جو چار مستقیم خطوط سے گھری ہو

۲۳ شکل کثیر الاضلاع وہ شکل ہے جو چار سے زیادہ مستقیم خطوط سے گھری ہو

۲۴ مثلث متساوی الاضلاع وہ مثلث ہے جسکے تینوں ضلع آپس میں برابر ہوں

۲۵ مثلث متساوی الساقین وہ مثلث ہے جسکے دو ضلع آپس میں برابر ہوں

۲۶ مثلث متساوی الاضلاع مثلث متساوی الساقین بھی ہوتا ہے لیکن ہر مثلث متساوی الساقین مثلث متساوی الاضلاع نہیں ہے

۲۷ مثلث مختلف الاضلاع وہ مثلث ہے جسکا کوئی ضلع دوسرے ضلع کے برابر نہ ہو

۲۸ مثلث قائم الزاویہ وہ مثلث ہے جسکا ایک زاویہ قائم ہو

۲۹ مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ کے سامنے کے ضلع کو وتر اور باقی دو ضلعوں سے ایک کے قاعدہ اور دوسرے کو عمود کہتے ہیں

۳۰ مثلث منفرج الزاویہ وہ مثلث ہے جسکا ایک زاویہ منفرج ہو

۳۱ مثلث حادہ الزاویہ وہ مثلث ہے جسکے تینوں زاویے حاد ہوں



ثلث حادہ الزوا یا میں تینوں زاویوں کے حادہ ہونے کی قید اسلئے کی گئی ہے کہ مثلث قائم الزوا یا اور مثلث منفرج الزوا یا میں (جیسا کہ پہلے مقالہ کی تشریہوں میں شکل کے پیرہنے سے معلوم ہوگا) دو دو زاویے حادہ ہوتے ہیں اگر مثلث کے صرف ضلعوں پر خیال کیا جائے تو وہ تین قسم کا ہوتا ہے یعنی مثلث تساوی الاضلاع اور مثلث تساوی الساقین اور مثلث مختلف الاضلاع اور تین ہی قسم کا اس صورت میں ہوتا ہے جب اس کے صرف زاویوں پر خیال کیا جائے یعنی مثلث قائم الزوا یا اور مثلث منفرج الزوا یا اور مثلث حادہ الزوا یا پھر مثلث کی اور بھی قسمیں ہو سکتی ہیں جب اس کے ضلعوں اور زاویوں دونوں پر خیال کیا جائے



۳۰ مربع وہ شکل ذوالرباعۃ الاضلاع ہے جس کے چاروں ضلعے آپس میں برابر ہوں اور چاروں زاویے قائمے ہوں۔

مربع کی تعریف میں ایک ہی زاویہ قائمہ کہنا کافی ہے کیونکہ جس شکل ذوالرباعۃ الاضلاع چاروں ضلعے آپس میں برابر ہوں اور ایک زاویہ قائمہ ہو تو اس کے سب زاویے جیسا کہ پہلے مقالہ کی پھیلائیوں میں ثابت ہوا ہے قائمے ہوتے ہیں



۳۱ مستطیل وہ شکل ذوالرباعۃ الاضلاع ہے جس کے چاروں زاویے قائمے ہوں لیکن اس کے سب ضلعے آپس میں برابر نہ ہوں

جس شکل ذوالرباعۃ الاضلاع کے آٹھ سائے کے ضلعے برابر ہوں اور ایک زاویہ قائمہ ہو اسکو مستطیل یا قائم الزوا یا کہتے ہیں



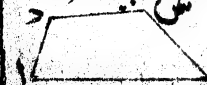
۳۲ مربع وہ شکل ذوالرباعۃ الاضلاع ہے جس کے سب ضلعے آپس میں برابر ہوں لیکن اس کے زاویے قائمے نہ ہوں



۳۳ شبیہ بالمعنی وہ شکل ذوالرباعۃ الاضلاع ہے جس کے آٹھ سائے کے ضلعے آپس میں برابر ہوں لیکن اس کے سب ضلعے آپس میں برابر نہ ہوں اور اس کے زاویے قائمے نہ ہوں



۳۴ ان چار شکلوں کے سوا ہر شکل ذوالرباعۃ الاضلاع کو شکل منحرف کہتے ہیں ہر شکل ذوالرباعۃ الاضلاع کو باوجود چاروں سائے کے جو اس کے چاروں اویوں پر لکھے ہوئے ہیں یا صرف دو اویوں پر لکھے ہوئے ہیں یا نہ لکھے ہوئے ہیں اس کے آٹھ سائے کے زاویے برابر ہوں گے جیسا کہ اس میں



شکل کو اب اس دیا اس یا ب د سے بیان کرتے ہیں

۳۵ خطوط مستقیم متوازیہ خط مستقیم ہیں ایک سطح میں ہوں

اور جو دونوں طرف بڑھائے جائیں کبھی ایک دوسرے سے نہیں ملتے

اس سے یہ سمجھنا چاہیے کہ اس سطح کی جو متوازی خطوط کے چھین ہوتی ہے جو پوائی ہر گزبہ ہر ایک

سی ہوتی ہے

و شکل متوازی الاضلاع وہ شکل ذوالرباعۃ الاضلاع ہے جس کے آٹھ سامنے کے ضلع

متوازی ہوں اور جو خط مستقیم کسی شکل ذوالرباعۃ اضلاع کے آٹھ سامنے کے زاویوں کو

ملتا ہے اسکو اس شکل کا قطعہ یا وتر کہتے ہیں

متوازی الاضلاع کے لفظی معنی تو یہ ہیں کہ وہ شکل جس کے ضلع متوازی ہوں اور اس کے متوازی

الاضلاع میں چار یا چھ یا آٹھ یا کوئی جفت ضلع نہیں آٹھ سامنے کے ہر ایک دو ضلع متوازی ہوں ہو سکتے

ہیں لیکن قلیلہ سے میں صرف چار ہی ضلع کی شکل کو متوازی الاضلاع کہا ہے اور اسکی چار قسمیں ہیں جہاں دو

۳۰ اور ۳۱-۳۲ اور ۳۳ میں بیان کی گئیں + د

اگر متوازی الاضلاع اب س د کا وتر اس جو

اوری ک ف اور ج ک ل متوازی اضلاع کے ضلعوں

اب اور ا د کے متوازی ہوں تو اس متوازی الاضلاع میں چار

متوازی الاضلاع بنیں گے جن میں سے دو یعنی ا ج ک ی اور ک ف س ل میں وتر گذرے گا

اور دو یعنی ی ک ل د اور ج ب ف ک میں وتر نہیں گذرے گا چنانچہ متوازی الاضلاع میں وتر

نہیں گذرے گا کہ متوازی الاضلاع ا ج ک ی اور ک ف س ل کا تمام کہتے ہیں +

## اصول موضوع

یعنی وہ باتیں جنکو سب مان لیا ہے

مان لو

- ۱۔ کہ کسی ایک نقطہ سے کسی دوسرے نقطہ تک خط کھینچ سکتے ہیں
  - ۲۔ کہ ایک خط مستقیم محدود کو اسکی بید نہی میں جہاں تک چاہیں بڑھا سکتے ہیں
  - ۳۔ کہ جس مرکز سے اور اس مرکز سے جس دوری پر چاہیں دائرہ کھینچ سکتے ہیں
- ان اصول موضوعہ میں مسطر اور ہر کار کی ضرورت پڑتی ہے

## علوم متعارفہ

یعنی ایسی غامض باتیں جنکے ثابت کرنے کے لئے دلیل کی حاجت نہیں ہے

- ۱۔ جو چیزیں ایک چیز کے برابر ہوں وہ آپس میں بھی ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں  
جو چیزیں برابر چیزوں کے برابر ہوں وہ آپس میں بھی برابر ہوتی ہیں
- ۲۔ اگر برابر چیزوں میں برابر برابر زیادہ کیا جائے تو بعد زیادہ کرنے کے جو چیزیں حاصل ہوں گی وہ بھی آپس میں برابر ہوں گی
- ۳۔ اگر برابر چیزوں میں سے برابر برابر نکال لیا جائے تو بعد نکال لینے کے جو چیزیں حاصل ہوگی وہ بھی آپس میں برابر ہوں گی
- ۴۔ اگر برابر چیزوں میں برابر برابر زیادہ کیا جائے تو بعد زیادہ کرنے کے جو چیزیں حاصل ہوگی وہ بھی برابر ہوں گی
- ۵۔ اگر برابر چیزوں میں سے برابر برابر نکال لیا جائے تو بعد نکال لینے کے جو چیزیں حاصل ہوں گی وہ بھی برابر ہوں گی
- ۶۔ جو چیزیں ایک ہی چیز کی دونی ہوں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں  
جو چیزیں برابر چیزوں کی دونی ہوں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں  
جو چیزیں ایک ہی چیز کی آدھی ہوں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں  
جو چیزیں برابر چیزوں کی آدھی ہوں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں

۸ جو مقداریں ایک دوسرے کو ڈھک لیتی ہیں یعنی ایک ہی جگہ گھیرتی ہیں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں

اسکے عکس کا استعمال بھی یعنی برابر مقداریں جب ایک دوسرے پر ایک ہی طور پر رکھی جائیں تو ایک دوسرے کو ڈھک لیتی ہیں اقلیدس نے کیا ہے

۹ کل اپنے ٹکڑے سے بڑا ہوتا ہے

۱۰ دو خط مستقیم سطح کو نہیں گھسیکتے ہیں

سطح کے گھسنے کے لئے کم سے کم تین خط مستقیم کا ہونا ضروری ہے

۱۱ سب زاویے قائمے آپس میں برابر ہوتے ہیں

چونکہ زاویہ ایک قسم کی مقدار ہے اسلئے یہ علوم متعارفہ آٹھویں علوم متعارفہ کی ایک خاص صورت ہے

۱۲ اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم سے ملکر اپنی ایک سمت میں دو زاویے

داخلے ایسے پیدا کرے کہ وہ دونوں زاویے ملکر دو قائموں سے چھوٹے ہوں تو

وہ دو خط مستقیم لگاتار بڑھائے جانے سے کہیں نہ کہیں اس سمت میں مل جائیں گے

سمت کے زاویے دو قائموں سے چھوٹے ہیں

یہ علوم متعارفہ پہلے مقالہ کی تشریحات کل کا عکس یعنی الٹا ہی اور ایسی ظاہرات نہیں ہیں جسکے

ثابت کرنے کے لئے دلیل کی حاجت نہ ہو اس علوم متعارفہ کے عیوض پانچویں صاحب نے اپنی کتاب میں یہ علوم

متعارفہ لکھا ہے اگر دو خط مستقیم ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہوں تو وہ دونوں خط کسی ایک

ہی خط کے متوازی نہیں ہو سکتے ہیں لیکن یہ علوم متعارفہ بھی اعتراض سے خالی نہیں کیونکہ

یہ پہلے مقالہ کی تشریحات کل کا ایک صریح نتیجہ ہے

دسویں اور گیارہویں ادبار ہوں علوم متعارفہ کو اصول موضوعہ کہنا زیادہ مناسب ہے۔



## علم ہندسہ کی شکلوں کا بیان

چودھویں حد میں بیان ہو چکا ہے کہ شکل وہ ہے جو ایک یا زیادہ حدود سے گھری ہو۔ تاہم اس میں  
 شکل کا لفظ مسئلہ کے معنی میں بھی استعمال ہوا ہے یعنی شکل وہ ہے جس میں کسی چیز کے بنانے یا کسی  
 اصول کے ثابت کرنے کی غرض بیان کی جائے اور جب شکل کے یہ معنی ہیں تو اس کی دو قسمیں ہیں  
 عملی اور اثباتی یا نظری۔ نہر شکل میں کچھ چیزیں یا اصول دیے ہوئے ہوتے ہیں اور ان سے کچھ چیزیں  
 کر نیکیا بیان ہوتا ہے اگر دریافت کرنے سے کسی چیز کے بنانے کی غرض ہے تو اس کو شکل عملی کہتے ہیں اور  
 اگر دریافت کرنے سے کسی اصول کے ثابت کرنے کی غرض ہے تو اس کو شکل اثباتی یا نظری کہتے ہیں شکل  
 عملی میں دی ہوئی چیزوں کو معلوم اور جن چیزوں کو بنانا چاہتے ہیں ان کو مطلوبہ شکل اثباتی میں  
 دیئے ہوئے اصول کو مقدم اور جو اصول ان سے دریافت کرنا چاہتے ہیں ان کو ثانی کہتے ہیں

علم ہندسہ میں شکل ان چھ باتوں سے پوری ہوتی ہے

- ۱۔ عام دعویٰ جس میں شکل کی شرطیں عام طور پر بیان ہوتی ہیں
- ۲۔ خاص دعویٰ جس میں ایک خاص شکل کھینچ کر اس پر دعویٰ کی شرطیں بیان کر کے ظاہر

کرتے ہیں

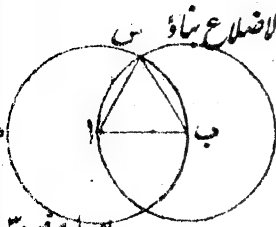
- ۳۔ جب شکل بن جائے تو اپنے اصلی مطلب کو بیان کرنا کہ ہم یہ بنانا یا ثابت کرنا چاہتے ہیں اور
- اسی پر ساری توجہ کرنا

۴۔ شکل کے حل کرنے یا ثابت کرنے کے لئے اصول موضوع کے مطابق ضروری خطوط  
 اور دائروں کو کھینچنا

- ۵۔ دلیلوں کے سلسلہ سے دعویٰ کو حل کرنا یا ثابت کرنا یعنی دریافت کرنا کہ دعویٰ ہمارا صحیح
- تھا یا غلط ہا جو مطلب ہمارا تھا اس کا حاصل ہونا ممکن ہے یا نہیں

۶۔ نتیجہ میں دعویٰ کو کھینچنے کے بعد ظاہر کرنا کہ جو چیز ہم کو بنانی تھی یا جو بات ہم کو ثابت کرنی  
 یا ثابت ہو گئی

## مشکل اصلی



اصول ہونا ضروری

اصول ہونا ضروری

اصول ہونا ضروری

دیسے ہوئے محو خط مستقیم پر مثلث متساوی الاضلاع بناؤ

فرض کرو کہ اب دیا ہوا محو خط مستقیم ہی

اب پر مثلث متساوی الاضلاع بنانا ہی

۱ مرکز سے اب دوری پر دائرہ ب س دیکھو

ب مرکز سے ب ا دوری پر دائرہ اس ی دیکھو

س نقطہ جسے دائرے ایک دوسرے کا ٹٹتے ہیں اور ب نقطوں تک خط مستقیم

س اور ب ب دیکھو

تو اب س مثلث متساوی الاضلاع ہوگا

۱۵

چونکہ ا مرکز دائرہ ب س دکا ہی اسلئے اس برابر ہی اب کے

۱۵

اور چونکہ ب مرکز دائرہ اس ی دکا ہی اسلئے ب س برابر ہی اب کے

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ اس برابر ہی اب کے

اسلئے اس اور ب س میں سے ہر ایک برابر اب کے ہی

علوم ہونا ضروری

لیکن جو چیزیں ایک ہی چیز کے برابر ہوں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں

اسلئے اس برابر ہی ب س کے

اسلئے اب اور ب س اور س آپس میں برابر ہوئے

۲۲

اسلئے اب س مثلث متساوی الاضلاع ہوا

اور وہ دیے ہوئے خط مستقیم اب پر بنایا گیا ہے اور اسی کے بنانے کی ضرورت تھی

اس شکل میں تین ایسے خطوط متساویہ کو مان لیا ہے کہ جب ایک دائرہ کا مرکز دوسرے دائرہ کے

محیط میں ہو تو اس دائرہ کا کچھ حصہ دوسرے دائرہ کے اندر ہوگا، کچھ حصہ باہر اور اسلئے اُن دائروں کے

محیط ایک دوسرے کو دو نقطوں پر کاٹیں گے چونکہ اُن نقطوں س سے ایک نقطہ دے

خط کے ایک طرف اور دوسرا دوسری طرف ہوگا اسلئے دو مثلث متساوی الاضلاع اس خط پر بنیے اور  
دونوں مثلث ملکر ایک مثل شکل معین پیدا ہوگی جسکا ایک وتر دیا ہوا خط ہوگا

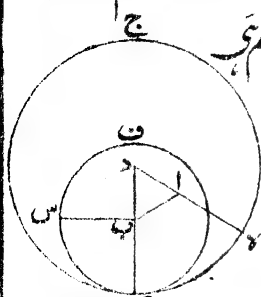
### مشق

سوال

- ۱۔ دیے ہوئے محدود خط مستقیم پر ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ جسکی ہر ایک ساق دے ہوئے خط
- ۲۔ دیے ہوئے محدود خط مستقیم پر ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ جسکی ہر ایک ساق کسی دوسرے دے ہوئے خط کے برابر ہو

### اشکل ۲ عملی

دیے ہوئے نقطہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو جو دیے ہوئے خط مستقیم کے برابر ہو



۱۔ اصول موضع ۳

فرض کرو کہ ا دیا ہوا نقطہ ب میں دیا ہوا خط مستقیم ہے

اسے ب میں کی برابر ایک خط مستقیم کھینچو

است ب تک خط اپ کھینچو اصول موضع ۱

اور اس مثلث متساوی الاضلاع ا د ب بناؤ اشکل ۱

ب مرکز سے ب میں دوری پر دائرہ میں سی ن کھینچو

د ب کوئی تک بڑھاؤ

د مرکز سے دی دوری پر دائرہ میں ج ک کھینچو

د اکوہ تک بڑھاؤ

تو ا د برابر ہوگا ب میں کے

چونکہ ب مرکز دائرہ میں ن کی کا ہی اسلئے ب میں برابر ہی بی کے

اور چونکہ د مرکز دائرہ میں ج کی کا ہی اسلئے د ک برابر ہی دی کے

اور ان کے حصے د اور ج برابر ہیں

اسلئے باقی حصہ ا اور ج برابر ہی کے

لیکن ثابت ہو چکا کہ ب برابر ہی بی کے

۲۔ علوم متعارفہ

اسی لئے اہ اور ب س میں سے ہر ایک برابر ہی بی کے  
لیکن جو چیزیں ایک ہی چیز کے برابر ہوں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں  
اسی لئے اہ برابر ہی ب س کے

اسی لئے خط مستقیم اہ دیے ہوئے نقطہ اس سے برابر دیے ہوئے خط مستقیم  
ب س کے کھینچا اور اسی کے کھینچنے کی ضرورت تھی

اس شکل میں جب دیا ہوا نقطہ نہ تو دیے ہوئے خط میں ہو اور نہ اس خط کی سیدھی میں ہو تو اس  
شکل کی آٹھ صوتیں پیدا ہوگی یعنی ایک ہی نقطہ سے آٹھ خط آٹھ طرف کھینچ سکتے ہیں کیونکہ

۱- دیے ہوئے خط کے دوسرے ہیں اور دیے ہوئے نقطہ کو ہر سرے سے ملانے کے لئے  
ایک خط کھینچا جاسکتا ہے

۲- ہر ملانے والے خط کے ہر طرف مثلث متساوی الاضلاع بن سکتا ہے

۳- مثلث متساوی الاضلاع کا وہ ضلع جو شکل میں پہلے بڑھایا جاتا ہے اپنے ہر سرے کی طرف بڑھایا  
لیکن جب دیا ہوا نقطہ دیے ہوئے خط میں یا اس کی سیدھی میں ہو تو وہ صوتیں جو نقطہ کو خط ہر سرے

سے ملانے سے پیدا ہوتی تھیں ایک ہو جائیں گی اور اسی لئے شکل کی صرف چار صوتیں رہ جائیں گی  
جب دیا ہوا نقطہ دیے ہوئے خط کے ہر سرے پر واقع ہو تو شکل بہت آسان ہی نقطہ کو مرکز

اس خط کی دوری بردارہ کھینچو اور خط کو دائرہ کے محیط تک بڑھاؤ بڑھا ہوا حصے ہوئے خط کے برابر  
مدرس کو چاہئے کہ اپنے لڑکوں سے اس شکل کی سب صوتیں کچھوائے

مشق

اگر اس شکل میں چھوٹے دائرہ کا قطر بڑے دائرہ کا نصف قطر ہو تو بتاؤ کہ دیا ہوا نقطہ اور بنا  
ہوئے مثلث کا راس کہاں ہوگا

شکل ۳ عملی

یہی اور نصف برابر ہی

دیے ہوئے دو خط مستقیم میں جو برابر ہو آئیں۔ ہر برابر ہی اور اس کے برابر ہی

فرض کرو کہ دیے ہوئے دو خط مستقیم اب اور س دیں اب ٹرائی

اب میں سے س کے برابر ایک حصہ کاٹنا ہے س

نقطہ اسے س کے برابر خط مستقیم ای کھینچو شکل

امریز سے ای دوری پر دائرہ ف ی ج

خط مستقیم اب کو نقطہ ج پر کھینچو

تو اج برابر س دے کے ہوگا

چونکہ امریز دائرہ ف ی ج کا ہی اسلئے اج برابر ہی کے

لیکن ای برابر س دے کے بنایا گیا ہے

اسلئے اج اور س دیں سے ہر ایک برابر ہی کے

اسلئے اج برابر ہی س دے کے

اسلئے دیے ہوئے بڑے خط اب میں سے ایک حصہ اج برابر چھوٹے

خط س دے کے گلیسا اور اسیکے کاٹنے کی ضرورت تھی

مشق

دیے ہوئے دو خط مستقیم میں جو چھوٹا ہو اسکو بڑھا کر بڑے کی برابر بنانا

مشکل ۴۴ اشباتی

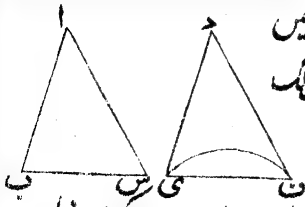
اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں

کے الگ الگ برابر ہوں اور ان ضلعوں سے بنے ہوئے زاویے بھی آپس میں

ہوں تو ان مثلثوں کے قواعد یعنی تیسرے ضلعے بھی آپس میں برابر ہوں گے اور

دونوں مثلثات ہمہ آپس میں برابر ہوں گے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ

باقی زاویوں کے یعنی وہ زاویے آپس میں برابر ہوں گے



فرض کرو کہ دو مثلث اب س اور دی ن میں  
 مثلث اب س کے دو ضلع اب اور اس الگ الگ  
 برابر ہیں مثلث دی ن کے دو ضلعوں  
 دی اور دن کے یعنی اب برابر دی کے اور اس برابر دن کے اور زاویہ  
 ب اس برابر ی زاویہ ی دن کے

تو قاعدہ ب س برابر ہوگا قاعدہ ی ن کے اور مثلث اب س برابر مثلث  
 دی ن کے اور باقی زاویے جن کے سامنے برابر ضلع ہیں الگ الگ برابر ہوں گے یعنی زاویہ  
 اب س برابر ہوگا زاویہ دی ن کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ دن ی کے  
 کیونکہ اگر مثلث اب س مثلث دی ن کے اوپر اس طرح سے رکھا جاوے کہ نقطہ  
 ب نقطہ ی پر ہو اور خط مستقیم با خط مستقیم ی د پر

تو چونکہ ب ا برابر ی د کے (ہو جنہ رض) نقطہ نقطہ پر پڑیگا  
 اور جب کل خط مستقیم ب ا نے کل خط مستقیم ی د کو ڈھک لیا تو چونکہ زاویہ  
 ب اس برابر ی زاویہ ی دن کے خط مستقیم اس خط مستقیم دن پر پڑیگا  
 اور چونکہ اس برابر ی دن کے (ہو جنہ رض) نقطہ ی دن پر پڑیگا  
 لیکن یہ بیان ہو چکا ہے کہ نقطہ ب نقطہ ی کے اوپر ہی  
 اسلئے کل قاعدہ ب س کل قاعدہ ی ن کو ڈھک لیگا

کیونکہ جب نقطہ ب نقطہ ی پر ہو اور نقطہ س نقطہ ن پر اگر کل قاعدہ ب س  
 کل قاعدہ ی ن پر نہیں پڑتا ہے تو دو خط مستقیم ب س اور ی ن ایک سطح کو گھیرتے  
 اور یہ بات ناممکن ہے

اسلئے کل قاعدہ ب س کل قاعدہ ی ن پر پڑے گا  
 اور کل مثلث اب س کل مثلث دی ن

اور باقی زاویے ایک مثلث کے دو کٹ مثلث کے باقی زاویوں کو پورا پورا  
 دھک لیتے ہیں اور ان کے برابر یعنی زاویہ اب اس برابر ہی زاویہ دی ف  
 کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ دی ف کے  
 اسلئے اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کے دو ضلعے دو کٹ مثلث کے  
 دو ضلعوں کے برابر ہوں۔ یہی ثابت کرنا تھا

نقطہ کا مرکز پرانا اور نقطہ سے کا نقطہ پر پرانا ثابت کرنے میں اقلیدس نے اٹھویں علم متعارفہ  
 کے عکس پرستہ استعمال کیا ہے

۱۔ مثلث میں چھ مقداریں ہوتی ہیں یعنی تین ضلعے اور تین زاویے اور (سوا دو خاص صورتوں کے) جب  
 ان چھ مقداروں میں سے کوئی تین دی ہوئی ہوں تو باقی تین دریافت ہو سکتی ہیں اور مثلث معلوم  
 ہو سکتا ہے اسلئے اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کی تین مقداریں جیسے مثلث معلوم ہو سکتا ہے دو کٹ مثلث  
 کی ان تین مقداروں کے الگ الگ برابر ہوں تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث بھی آپس میں برابر ہوں گے  
 ان تین مقداروں کی چھ قسم صورتیں ہو سکتی ہیں اور وہ یہ ہیں

۱ تین زاویے

۲ تین ضلعے

۳ دو ضلعے اور ان سے بنا ہوا زاویہ

۴ دو ضلعے اور ان میں سے ایک ضلع کے سامنے کا زاویہ

۵ دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع

۶ دو زاویے اور ان میں سے ایک کے اوپر کے سامنے کا ضلع

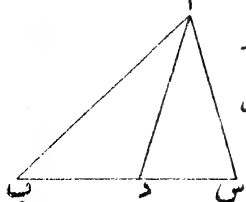
پہلی صورت ان دو صورتوں میں سے ہے جن میں مثلث نہیں دریافت ہو سکتا ہے کیونکہ مثلث کے

ضلعے نیز زاویوں کے گھٹنے بڑھنے کے گھٹ بڑھہ سکتے ہیں

دوسری صورت اس متال کی اٹھویں شکل میں ثابت ہوئی ہے

یہی صورت اس شکل میں ثابت ہوئی ہے

جو قطعی صورت میں بھی مثلث ٹھیک ٹھیک نہیں معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہ ممکن ہے کہ ایک مثلث کے دو ضلعے تو دوسرے مثلث کے ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ایک ضلع کے سامنے کا زاویہ بھی برابر ہو دو مثلثات کے ایک زاویہ کے جو پہلے ضلع کے برابر ضلع کے سامنے ہے لیکن مثلث آپس میں برابر نہ ہوں مثلاً فرض کر



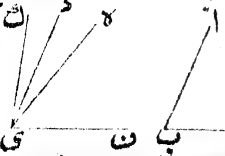
کہ اس ایک مثلث تساوی الساقین ہے جس کے ضلعے ادا اور اس آپس میں برابر ہیں س د کو کسی نقطہ تک بڑھاؤ اور اب لاؤ اب یہ ظاہر ہے کہ مثلث اب س اور اب د میں ضلعے اب اور اس تو برابر ہیں ضلعوں

اب اور اد کے اور زاویہ ب جو برابر ضلعوں اس اور اد کے سامنے ہے دونوں مثلثوں میں شامل ہے لیکن مثلث آپس میں برابر نہیں ہیں

باجوں اور قطعی صورتیں اس مقالہ کی جیسویں شکل میں ثابت ہوئی ہیں

(اس بات کے دریافت کرنے کے لئے کہ دو مقداریں ایک ہی جگہ گھبرتی ہیں یا نہیں یعنی ایک دوسرے پورا پورا ڈھک لیتی ہیں یا نہیں انکو ایک سری پر رکھنے کو) جیسا کہ اس مقالہ کی جو قطعی شکل میں مثلث ایک دوسرے پر رکھے گئے ہیں (عمل تطبیق کہتے ہیں انھوں نے علم تغیر میں بیان ہوا ہے کہ جو مقداریں ایک ہی جگہ گھبرتی ہیں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں مثلاً اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے پر سطح رکھے جاسکیں کہ ایک کے دو سرے دوسرے کے دو سرے پر پڑیں تو وہ خط مستقیم آپس میں برابر ہوتے ہیں اور اگر دو زاویوں کو ہم ایک دوسرے پر سطح رکھیں کہ ایک کے دو سرے کے راس پر ہوا و ایک کی ساقوں کی سمتیں بھی دوسرے کی ساقوں کی سمتوں پر پڑیں تو

وہ زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں کیونکہ ساقوں کی لمبائی کے گھٹنے بڑھنے سے جیسا کہ ہم توں حدیں بیان کر چکے ہیں زاویہ گھٹتا بڑھتا نہیں ہے اگر دو سطح مستوی ایک دوسرے پر سطح رکھے جاسکیں کہ ایک کے ضلعوں کی سمتیں اور لمبائی دوسرے کے ضلعوں کی سمتوں اور لمبائی کو پورا پورا ڈھک لیں تو وہ سطحیں آپس میں



برابر ہوتی ہیں لیکن جب دو مقداریں ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لیتی ہیں تو وہ برابر ہوتی ہیں فرض کرو کہ اب س اور د ی



دو زاویے ہیں اور زاویہ اب س کا راس ب زاویہ دے ف کے راس ی پر کھینچا گیا اور خط  
 ب س کی سمتی ف کی سمت پر کھینچی گئی اگر خط ب کی سمت خط ی کی سمت پر پڑتی ہے  
 تو زاویہ اب س اور دے ف آپس میں برابر ہوتے ہیں اور اگر ب کی سمت ی کی سمت  
 پر یعنی ف ی اور ی دے ف کی سمتوں کے درمیان پڑتی ہے تو زاویہ اب س زاویہ دے ف  
 سے چھوٹا ہوتا ہے اور اگر ب کی سمت ی کی سمت پر پڑتی ہے یعنی ف ی دے ف کی سمت  
 ی ف اور ی دے ف کی سمتوں کے درمیان ہے تو زاویہ اب س زاویہ دے ف سے بڑا ہوتا ہے  
 بعض یا ضعیف دلائل تطبیق کے عمل کو پسند نہیں کرتے ہیں اور یہ مبالغہ صاحب لکھا ہے کہ اس عمل  
 کے لئے اس اصول موضوعہ کے مان لینے کی ضرورت ہے کہ ہر شکل متوی کو بغیر اسکی متویات اور  
 تبدیل کے ہوئے ایک جگہ سے ہٹا کر دوسری جگہ پر کھینچے ہیں اور سطح میں اسکو لوٹ سکتے ہیں یا نہ  
 ان میں بھی ضرورت ہے کہ اگر ایک خط مستقیم کا دو نقطوں کے درمیان کا حصہ دوسرے خط مستقیم کے نقطوں  
 کے درمیان کے حصہ پر پڑتا ہے تو ان خط مستقیم کے باقی حصوں کی سمتیں بھی ایک دوسری پر پڑتی ہیں  
 مثلث کے کسی دو ضلعوں کو چھوڑ کر تیسرے ضلع کو قاعدہ کہتے ہیں

نتیجہ صحیح اگر مثلثوں کے ضلع اب اور دے ف یا ضلع اس اور دے ف قاعدہ کی طرف بڑھا  
 جائیں تو عمل تطبیق سے ثابت ہوگا کہ زاویہ ب ضلعوں کے درمیان جانتے علاقہ کے ہر طرف پڑتا ہے

### مشق

۱ اگر دو مثلثوں میں ایک مربع کا ایک ضلع دوسرے مربع کے ایک ضلع کے برابر ہو تو وہ دونوں مربع  
 آپس میں برابر ہوں گے

۲ اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں کاٹتے ہوں اور ایک سر کے ساتھ زاویے  
 قائم بھی بناتے ہوں تو انہیں سے ہر ایک خط کا نقطہ دوسرے خط کے سروں سے برابر دوری پر ہوگا

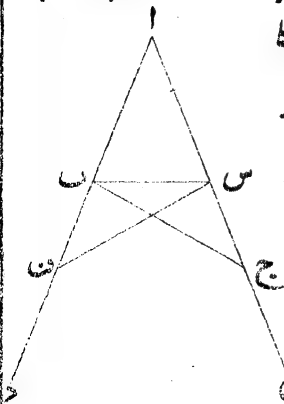
۳ دو رابطہ الاضلاع اب س دے ف کے ضلع اب اور ا دے ف آپس میں برابر ہیں اور وتر اس زاویہ ب  
 میں ہیں تفہیم کرنا ہی ثابت کر دے ف کے ضلع ب س اور دے ف آپس میں برابر ہیں اور وتر اس

زاویہ ب س د کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے

۴ مثلث متساوی الاضلاع کے کسی زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا ہو خط اس زاویہ کے سامنے کے ضلع کو بھی دو برابر حصوں میں تقسیم کرے گا اور اس کے ساتھ زاویہ ق ایسے قائمے بنا لے گا

### شکل ۵ اثباتی

مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے اوپر کے زاویہ آپس میں برابر ہوتے ہیں اور اگر برابر ساقین بڑھائی جائیں تو قاعدہ کے نیچے کے زاویہ بھی آپس میں برابر ہوں گے



شکل ۳

اصول متشکو

فرض کرو کہ اب س مثلث متساوی الساقین بن چکا

ضلع اب ضلع اس کے برابر ہی اور یہ بھی فرض کرو کہ برابر

ساقین اب اور اس نقطوں دواوی تک بڑھائی گئی ہیں

تو زاویہ اب س برابر ہوگا زاویہ اس ب کے اور زاویہ

د ب س برابر ہوگا زاویہ ی س ب کے

ب د میں کوئی نقطہ مقرر کرو

اور بڑے خط ای میں سے ا ج برابر ان کے کاٹ لو

اور ف س اور ج ب کو ملا دو

چونکہ ا ج برابر ان کے بنا لیا گیا ہے

اور اب برابر ہی اس کے

اسلئے مثلث ف س کے دو ضلع ف ا اور اس الگ الگ برابر ہیں مثلث ج ا ب

کے دو ضلعوں ج ا اور اب کے

اور ان ضلعوں کے درمیان کا زاویہ ف ا ج دونوں مثلثوں میں مشترک ہے

اسلئے قاعدہ ف س برابر ہی قاعدہ ج ب کے اور مثلث ف س اس برابر ہی مثلث

ج اب کے اور باقی زاویے ان مثلثوں کے چنے سائے برابر ضلع ہیں الگ الگ برابر ہیں

زاویہ اسے برابر ہی زاویہ اب ج کے اور زاویہ ا ف سے برابر زاویہ ا ج کے شکل ہ  
 چونکہ مثل ا ف برابر ہی مثل ا ج کے اور ان کے حصے اب اور اس آپس میں برابر ہیں  
 اسلئے باقی حصہ ب ف برابر ہی باقی حصہ ب ج کے علوم متعارفہ  
 اور ف سے برابر ج ب کے ثابت ہو چکا ہے  
 اب چونکہ دو ضلعے ب ف اور ف سے الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں سے ج  
 اور ج ب کے اور زاویہ ب ف سے برابر زاویہ ب ج کے ثابت ہو چکا ہے  
 اسلئے مثلث ب ف سے اور ج ب آپس میں برابر ہیں اور ان کے باقی زاویے  
 جن کے سامنے برابر ضلعے ہیں الگ الگ برابر ہیں یعنی زاویہ ف ب سے برابر ہی زاویہ ج ب سے  
 کے اور زاویہ ب سے برابر ہی زاویہ ج ب کے شکل ہ  
 اور چونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ مثل زاویہ اب ج برابر ہی مثل زاویہ اس ف کے اور  
 ان کے حصے ب ج اور ب سے ف آپس میں برابر ہیں  
 اسلئے باقی زاویہ اب سے برابر ہی باقی زاویہ اس ب کے علوم متعارفہ  
 اور یہ زاویے مثلث متساوی الساقین اب سے کے قاعدہ کے اوپر کے ہیں  
 اور یہ بھی ثابت ہو چکا ہے کہ زاویے ف ب سے اور ج سے ف آپس میں برابر ہیں  
 اور یہ زاویے قاعدہ کے نیچے کے ہیں  
 اسلئے مثلث متساوی الساقین کے الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
 اس شکل کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں اگر ہم مثلث اب سے کو سطح میں لوٹ کر اس طرح کریں  
 کہ نقطہ ا کی جگہ نہ تبدیل ہو اور ضلع اب ضلع اس پر ہو چونکہ زاویہ او دونوں مثلثوں میں مشترک ہے ضلع اس  
 ضلع اب پر ٹیگا اور چونکہ اب اور اس آپس میں برابر ہیں نقطہ ب پر ٹیگا اور نقطہ ب ف ف برابر ہوگا  
 اور زاویہ اس ب زاویہ اب سے کو پورا پورا دو ٹوک لیکھا اور زاویہ ب سے ج زاویہ ب سے ف کو  
 زاویہ اس ب برابر ہوگا زاویہ اب سے کے اور زاویہ ب سے ج برابر ہوگا اور یہ ب سے ف کے

نتیجہ صریح مثلث تساوی الاضلاع کے سب زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں

مشق

۱ شکل میں آئینے سامنے کے زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں

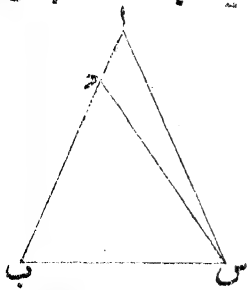
۲ اگر ایک ہی قاعدہ پر دو مثلث تساوی الساقین ہوں اور قاعدہ کے سامنے کے زاویوں کے درمیان ایک خط کھینچا جائے تو وہ خط (یا خط پڑھکر) قاعدہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرے گا اور اس کے ساتھ زاویے قائمے بنائیگا

شکل ۲ اثباتی

اگر کسی مثلث کے دو زاویے آپس میں برابر ہوں تو ان زاویوں کے سامنے کے ضلعے آپس میں برابر ہوں گے

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہے اور اس کے زاویے اب س اور اس آپس میں برابر ہوں تو ضلعے اس اور اب بھی آپس میں برابر ہوں گے  
اگر اس اور اب آپس میں برابر ہوں تو نہیں

ایک دوسرے سے بڑا ہوگا



شکل ۳

فرض کرو کہ اب بڑا ہی اس سے

اب میں سے ب د برابر اس کے کاٹ لو

اور س د ملاؤ

اب چونکہ مثلث دب س اور اس ب میں دب برابر ہی اس کے اور ب

دونوں میں مشترک ہے یعنی دو ضلعے دب اور ب س ایک مثلث کے الگ الگ

برابر ہیں دو بکے مثلث کے دو ضلعوں اس اور س ب کے

اور زاویہ دب س برابر ہی زاویہ اس ب کے

اس لئے قاعدہ دس برابر ہی قاعدہ اب کے اور مثلث دب س برابر ہی مثلث

اس ب کے

شکل ۴

علوم

یہ چھوٹا مثلث برابر ہی بڑے مثلث کے اور یہ بات صاف چھوٹھے ہی  
اسلئے اب اور اس نابرابر نہیں ہیں یعنی اس برابر اب کے  
اس واسطے اگر دو زاویے الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یاد رکھنا چاہئے کہ اب میں سے چھوٹے خط کی برابر حصہ زاویہ ب کی طرف سے کاٹنا چاہئے

نہیں تو جو تھی شکل سے اس شکل کا ثابت کرنا خیر ممکن ہوگا

یہ شکل باوجود شکل کے پہلے حصہ کا عکس ہے یعنی اس شکل میں جوابات مقدم اور موضوع کی جگہ پر ہی  
اس حصہ میں تالی اور محمول کی جگہ پر ہی اور جوابات اس میں تالی اور محمول کی جگہ پر ہی اس میں مقدم  
اور موضوع کی جگہ پر ہی صیاد کر ان دونوں شکلوں کو اس طرح پر بیان کرنے سے صاف ظاہر ہوگا

شکل ۵ اگر دو ضلع برابر ہیں تو ان کے سامنے کے زاویے برابر ہیں

شکل ۶ اگر دو زاویے برابر ہیں تو ان کے سامنے کے ضلع برابر ہیں

یہ شکل ثبوت بہ خلف سے ثابت کی گئی ہے جب ہم کسی شکل کے نتیجہ کو صحیح نہ مانکر اس کے خلاف کو  
صحیح مانتے ہیں اور اس سے آخر کو ایک ایسا نتیجہ نکلتا ہے جو صاف چھوٹھے ہی شکل میں جوابات فرض  
کی گئی ہے اس کے خلاف ہے تو ہم کہتے ہیں کہ شکل کے نتیجہ کا خلاف جسکو ہم نے صحیح مانا تھا غلط ہے اور  
اسلئے شکل کا نتیجہ صحیح ہی ایسے ثبوت کو ثبوت بہ خلف کہتے ہیں اس قسم کے ثبوت کا استعمال اقلیدس نے  
شکلوں کے عکس ثابت کرنے میں اکثر کیا ہے

اس شکل کی ضرورت وہ سر مقابلہ کی جو تھی شکل تک نہیں بڑی ہے اگر ہم اسکو کہیں دوسری جگہ  
براہم ہا کر رکھ دیں تو کچھ خرابی نہیں پیدا ہوگی مثلاً اگر ہم اسکو اٹھا رہیں تو شکل کے بعد رکھیں تو یہ  
اس طرح ثابت ہو سکتی ہے فرض کرو کہ زاویہ اب اس زاویہ اس ب کے برابر ہی تو ضلع اس بھ  
اب کے برابر ہوگا اگر یہ ضلع ہمیں برابر نہ ہوں تو ایک انہیں سے بڑا ہوگا فرض کرو کہ امیہ

بند و زاویہ اس ب زاویہ اب اس سے بڑا ہوگا (شکل ۱۸) لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ زاویے

اس ب اور اب میں ہر ایک کے آپس میں برابر اسلئے اب اور اس برابر نہیں ہیں یعنی  
 اب برابر ہی اس کے اور اگر میں شکل کو چھبھو تو شکل کے بعد لکھیں تو اس طرح ثابت کریں گے کہ زاویہ  
 ب اس کو خط اد سے جو قاعدہ ب میں سے نقطہ پر قائم ہو برابر حصوں میں تقسیم کرو اس سے دو مثلثا  
 دو مثلث اب د اور اس د پیدا ہوں گے اور وہ چھبھو تو شکل کے حکم سے آپس میں سب طرح سے  
 برابر ہوں گے اور ضلع اب ضلع اس کے برابر ہو گا اس شکل کو تطبیق کے عمل سے بھی جیسا ہم  
 پانچویں شکل کو ثابت کیا ہے ثابت کر سکتے ہیں  
 نتیجہ صریح مثلث متساوی الزوایا کے سب ضلع آپس میں برابر ہوتے ہیں

### مشق

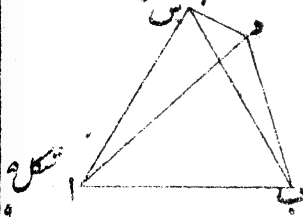
۱ اگر مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے اوپر کے زاویہ اب میں اور اس ب خط ب د  
 اور میں د سے دو برابر حصوں میں تقسیم کے جائیں تو ثابت کرو کہ ب میں د مثلث متساوی الساقین ہے  
 ۲ مثلث ب اس کا زاویہ ب زاویہ اسے دو باہمی اگر خط ب د زاویہ ب کو دو برابر حصوں میں تقسیم  
 کر کے ضلع اس سے د نقطہ پر ملے ثابت کرو کہ ب د برابر اد کے ہی  
 ۳ پہلے مقالہ کی پانچویں شکل میں اگر ب ج اور ب ج نقطہ ہ پر ملے تو ب ج برابر ج کے ہو گا  
 ۴ پہلے مقالہ کی پانچویں شکل میں اگر ب ج اور ب ج نقطہ ہ پر ملے تو خط ا ب زاویہ ب اس  
 کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرے گا

### مشکل و اثباتی

اگر ایک ہی قاعدہ پر او اس کے ایک ہی طرف دو مثلث ہوں تو ممکن نہیں ہے کہ ان کے وہ  
 ضلع جن کے سرے قاعدہ کے ایک سرے پر ہوں آپس میں برابر ہوں اور وہ ضلع بھی  
 جن کے سرے قاعدہ کے دوسرے سرے پر ہوں آپس میں برابر ہوں  
 گر یہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک ہی قاعدہ اب پر او اس کے ایک ہی طرف ایسے  
 دو مثلث اس ب اور اد ب ہیں کہ ان کے ضلع میں او د ا جن کے سرے قاعدہ کے

اے ہیں آپس میں برابر ہیں اور ضلعے س ب اور د بھی جتنے سے قاعدہ کے برابر  
ب پ ہیں آپس میں برابر ہیں

س د ملا کر اس شکل کی تین صورتیں ہیں پہلی صورت یہ ہے کہ ہر مثلث کا راس  
دوسرے مثلث کے باہر ہو



شکل ۱  
دوسری صورت

چونکہ ا د برابر اس کے فرض کیا گیا ہے  
اس لئے زاویہ اس د برابر ہی زاویہ ا د کے

لیکن زاویہ اس د زاویہ ب س د سے بڑا ہے

اس لئے زاویہ ا د س بھی زاویہ ب س د سے بڑا ہے

اور اس واسطے زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے اوپر بھی زیادہ بڑا ہے

پھر چونکہ ب س برابر د کے فرض کیا گیا ہے

اس لئے زاویہ ب د س برابر ہی زاویہ ب س د کے

شکل ۲

لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے بڑا ہے

اس لئے زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے بڑا اور اس کے برابر بھی ہے

اور یہ بات ناممکن ہے

دوسری صورت یہ ہے کہ مثلث ا د ب کا راس د مثلث اس ب کے اندر ہے

اس اور ا د کوئی اور نقطہ تک بڑھاؤ

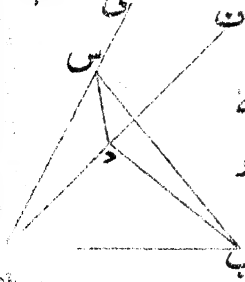
چونکہ مثلث اس د میں ضلع اس برابر ہی ا د کے

اس لئے قاعدہ س د کے نیچے کے زاویے ہی س د

اور س د س آپس میں برابر ہیں

بہی س د زاویہ ب س د سے بڑا ہے

یہ س د س بھی زاویہ ب س د سے بڑا ہے



شکل ۲  
تیسری صورت

اور اس واسطے زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے اور بھی زیادہ بڑا ہی

پھر جو کہ ب س برابر ب د کے منہض کیا گیا ہی

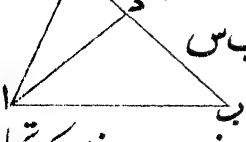
اسلئے زاویہ ب د س زاویہ ب س د کے برابر ہی شکل ۹

لیکن یہ ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے بڑا ہی

اسلئے زاویہ ب د س زاویہ ب س د سے بڑا اور اس کے برابر بھی ہی

اور یہ بات ناممکن ہی

تیسری صورت جہیں مثلث ادب کا راس د مثلث اس ب کے س



ضلع پر ہی اس صورت میں صاف ظاہر ہی کہ ب د اور ب س

ا پس میں برابر نہیں ہو سکتے ہیں

اسلئے اگر ایک ہی قاعدہ پر اور اس کے ایک ہی طرف دو مثلث الخ۔ یہ ثابت کرنا تھا

اس شکل کا کام پہلے مقالہ کی صورت اٹھویں شکل کے ثابت کرنے میں پڑنا ہی سو اٹھویں شکل کا یہ

دوسرے طور پر بھی ہو سکتا ہی اور اس ثبوت میں اس شکل کی کچھ ضرورت نہیں پڑتی

آئندہ میں نے اس شکل کے ثابت کرنے میں شکل کے نتیجہ کے خلاف کو صحیح مانکر اس سے آخر کو ای

دو باتیں نکالی ہیں جو ایک سے کسی کی ضد ہیں یعنی ایک زاویہ دوسرے زاویہ سے بڑا اور اس کے برابر بھی ہی

اس قسم کے ثبوت کا استعمال آئندہ میں صرف ان ہی شکل میں کیا ہی اور کسی دوسری جگہ پر نہیں کیا ہی

یاد رکھنا چاہئے کہ ایک ہی قاعدہ پر اور اس کے ایک ہی طرف ایسے دو مثلث ہو سکتے ہیں کہ ان کے

دو ضلع جس کے سرے قاعدہ کے ایک سرے پر ہوں ا پس میں برابر ہوں مگر وہ ضلع جس کے سرے قاعدہ کے دوسرے

سے ہوں برابر ہوں

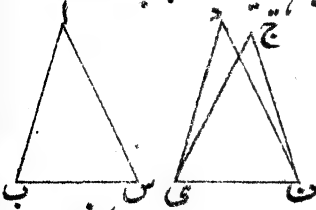
## شکل ۱۰ ثباتی

اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں

اور ان کے قاعدے بھی ا پس میں برابر ہوں تو زاویہ جو ایک مثلث کے دو ضلعوں کے مابین



برابر ہوگا دوسرے مثلث کے اس زاویہ کے جو اس ضلع کے برابر ضلعوں سے بنی ہو  
فرض کرو کہ مثلث اب س کے دو ضلع اب اور اس مثلث دی ف کے دو  
ضلعوں دی اور د ف کے الگ الگ برابر ہیں یعنی اب برابر دی کے اور  
اس برابر د ف کے ہی اور قاعدہ ب س



بھی برابر قاعدہ دی ف کے ہی تو زاویہ  
ب اس برابر ہوگا زاویہ دی ف کے  
کیونکہ اگر مثلث اب س مثلث دی ف برابر طرح رکھا جائے کہ نقطہ ب  
نقطہ دی پر اور نقطہ ب س خطی ف پر ہو تو چونکہ ب س برابر دی ف کے (فرض)  
نقطہ س نقطہ ف پر پڑیگا

اور جب قاعدہ ب س قاعدہ دی ف پر پورا پورا پڑتا ہی تو ضلع ب ا اور س ا  
ضلعوں دی د اور ف د پر پڑیں گے

کیونکہ اگر قاعدہ ب س قاعدہ دی ف پر پڑے لیکن ضلع ب ا اور س ا  
دی د اور ف د پر نہ پڑیں بلکہ مختلف جگہوں پر ہی ج اور ف ج کے طرح پڑیں  
تو ایک ہی قاعدہ پر اور اس کے ایک ہی طرف ایسے دو مثلث واقع ہوں گے کہ  
ان کے وہ ضلع جن کے سرے قاعدہ کے ایک سرے پر ہیں آپس میں برابر ہیں اور ان کے  
وہ ضلع بھی جن کے سرے قاعدہ کے دوسرے سرے پر ہیں آپس میں برابر ہیں  
لیکن یہ ناممکن ہی

اس لئے اگر قاعدہ ب س قاعدہ دی ف پر پڑتا ہی تو ضلع ب ا اور س ا  
دی د اور ف د پر ضرور پڑتے ہیں

اور اس لئے زاویہ ب اس اوری د ف ایک دوسرے کے کو پورا پورا دھندلے  
زاویہ اس لئے وہ آپس میں برابر ہیں

اے واسطے اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے برابر  
یہی ثابت کرنا تھا

نتیجہ صریح اس سے ثابت ہو سکتا ہے کہ برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے بھی آپس میں برابر ہیں  
زاویہ ب برابر زاویہ ی کے اور زاویہ س برابر زاویہ ت کے اور دونوں مثلث بھی آپس میں برابر ہیں  
اس شکل کو بغیر سہ توہین شکل کی مدد کے اس طرح ثابت کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ مثلث اب س اور جی ت اس طور سے رکھے گئے ہیں کہ قاعدہ ب س قاعدہ جی ت  
ی ت برہی اور مثلثوں کی راہیں اور دائیک دوسرے کے سامنے ہیں  
اسکی تین صورتیں ہیں  
دائما  
پہلی صورت یہ ہے کہ قاعدہ ی ت کو ی اور ت کے درمیان کاٹنا ہے

چونکہ مثلث ای دیں ضلع ای ضلع دی کے برابر ہے  
اسلئے زاویہ ی و زاویہ ی ا د کے برابر ہے شکل ہ

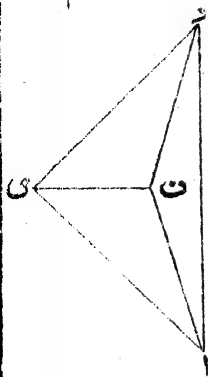
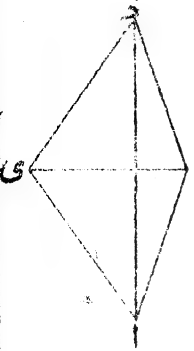
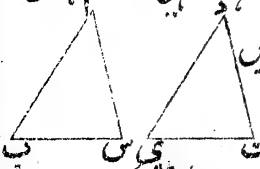
اور چونکہ مثلث ان دیں ضلع ان ضلع د ت کے برابر ہے  
اسلئے زاویہ ت و زاویہ ت ا د کے برابر ہے شکل ہ

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ زاویہ ی و زاویہ ی ا د کے برابر ہے  
اسلئے کل زاویہ ی و ت کل زاویہ ی ا ت کے برابر ہے

لیکن زاویہ ی ا ت زاویہ ب اس ہے  
اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ی و ت کے برابر ہے

دوسری صورت یہ ہے کہ قاعدہ ی ت کو نہ کاٹے  
چونکہ مثلث ای دیں ضلع ای ضلع دی کے برابر ہے

اسلئے زاویہ ی و زاویہ ی ا د کے برابر ہے شکل ہ  
اور چونکہ مثلث ان دیں ضلع ان ضلع د ت کے برابر ہے



شکل ۵

اسلئے زاویہ د ازاویہ د کے برابر ہی

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ کل زاویہ ی د ازاویہ ی د کے برابر ہی

اور اس کے حصے د ا اور د ا آپس برابر ہیں

علوم متعارفہ ۳

اسلئے باقی حصہ ی د د برابر ہی باقی حصہ ی د کے

لیکن زاویہ ی د ا زاویہ ی د ا ہی

اسلئے زاویہ ی د ا زاویہ ی د ا کے برابر ہی

تیسری صورت یہ کہ ا د اور د ا ایک ہی سیدھی ہیں یعنی ا د قاعدہ ایک سر پر ہو کر گذرنا ہی

ہو کہ مثلث ا ی د میں د ی برابر ہی ا ی کے

اسلئے زاویہ ی د ا برابر زاویہ ی د ا کے ہی شکل ۵

ی د

لیکن زاویہ ی د ا زاویہ ی د ا ہی

اسلئے زاویہ ی د ا زاویہ ی د ا کے برابر ہی

یہ شکل پہلے تھا کہ کی چوتھی شکل کا عکس ہے جس کی شکل اثباتی میں کہی باتیں فرض کی ہوئی ہیں اور ان کا

ایک نتیجہ ہو گا کہ دوسری شکل ایسی بنائی جاوے کہ پہلی شکل کی فرض کی ہوئی باتوں میں سے ایک باتیں شکل

کا ترجمہ اور پہلی شکل کا نتیجہ سب باقی فرض کی ہوئی باتوں کے اس شکل میں فرض کی ہوئی باتیں مع یہ ایسی

دو شکلیں کو بھی ایک دوسرے کا عکس کہتے ہیں اور اسی صورت میں آٹھویں اور چوتھی شکلیں ایک دوسرے

کا عکس ہیں جیسا کہ ان شکلوں کو اس طرح بیان کرنے سے صاف معلوم ہو گا

شکل ۶

اگر دو ضلع برابر ہیں

تو قاعدے برابر ہیں

اور قاعدوں کے سامنے کے زاویے برابر ہیں

شکل ۷

اگر دو ضلع برابر ہیں

تو قاعدوں کے سامنے کے

اور قاعدے برابر ہیں

آٹھویں شکل کا دوسری قسم کا عکس یہی "اگر ایک مثلث کے تین زاویے دو دوسرے مثلث کے تین زاویوں کے برابر ہیں تو قاعدے برابر ہیں"

کے الگ الگ برابر ہوں تو برابر زاویوں کے سامنے کے ضلع بھی آپس میں برابر ہو گئے "صحیح نہیں ہے

### مشق

۱ اگر مثلث متساوی الساقین کے راس سے ایک خط قاعدہ کو دو برابر حصوں میں کاٹتا ہو کھینچا جائے تو وہ خط راس کے زاویہ کے بھی دو برابر حصے کرے گا

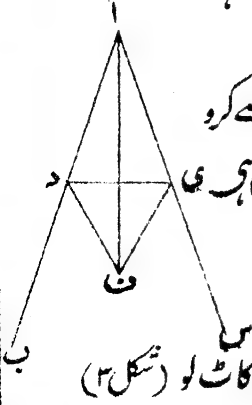
۲ معین کے قطر جن زاویوں میں ہو کر گزرتے ہیں ان کے دو برابر حصے کرتے ہیں

۳ دو مثلث اس ب اور اد ب خط اب کے ایک ہی طرف واقع ہیں اور ان کے ضلع اس

اور ب د برابر ہیں اور ضلع اد اور ب س برابر ہیں اور اد اور ب س نقطہ ی پر ایک دوسرے

کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ای ب مثلث متساوی الساقین ہے

### شکل ۹ عملی



دے ہوئے زاویہ متقیم الخطین کے دو برابر حصے کرو

فرض کرو کہ ب اس دیا ہوا زاویہ متقیم الخطین ہے

اس کے دو برابر حصے کرنے ہیں

اب میں کوئی نقطہ نہ

اور بڑے خط اس میں سے ای برابر اد کے کاٹ لو (شکل ۲)

اصول منصوصہ

اور دی ملاؤ

شکل ۱

دی پر اسے دو مثلث متساوی الاضلاع د ق ی بناؤ

اصول منصوصہ

اور اف ملاؤ

تو خط اف زاویہ ب اس کے دو برابر حصے کرے گا

چونکہ ای برابر اد کے بنایا گیا ہے

اور اف دو مثلث دان اور ی اف میں مشترک ہے

یعنی دو ضلع دا اور اف الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں ی اف اور اف کے

ح ۲۲

شکل

اور قاعدہ د ف قاعدہ ی ف کے برابر ہی  
اسلئے زاویہ د ا ن برابر زاویہ ی ا ن کے ہی  
اسلئے دیئے ہوئے زاویہ ی تقیم الخطین ب ا س کے خط ا ن سے دو برابر  
حقے ہو گئے اور اسی زاویہ کے دو برابر حصے کرنے کی ضرورت تھی

۱۔ دو مثلث متساوی الاضلاع بنانے کی قید اسلئے کی گئی ہے کہ اگر ایسا نہ ہو اور مثلث متساوی الاضلاع  
دی کے اس طرف بنایا جاوے جس طرف مثلث د ا ی ہی تو ایک صورت میں ممکن ہوگا کہ نقطہ ف نقطہ ا  
پر پڑے اور اُس صورت میں خط ا ن نہ کھج سکیگا

یہ بھی یاد رکھنا چاہئے کہ نقطہ ف زاویہ ب ا س کے اندر ہوگا کیونکہ ف کے زاویہ ب ا س  
کے باہر ہونے یا خط ا ب یا ا س پر ہونے سے یہ نتیجہ نکلے گا کہ مثلث متساوی الاضلاع ب د ی کے  
قاعدہ د ی پر کا زاویہ ایک ہی حالت میں زاویہ ب د ی یا زاویہ س ی د سے چھوٹا ہوگا  
اور اُس سے بڑا یا اس کے برابر ہوگا اور یہ بات ناممکن ہے

اس شکل کے ذریعے ایک زاویہ کے چار اور آٹھ اور سولہ وغیرہ برابر حصے ہو سکتے ہیں

مشق

نوین شکل کو بغیر آٹھویں شکل کی مدد کے ثابت کرو

شکل ۱۰ عملی

دیئے ہوئے محدود خط مستقیم کے دو برابر حصے کرو

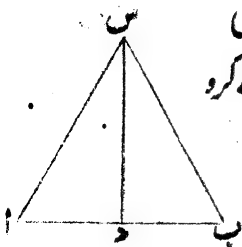
فرض کرو کہ ا ب دیا ہوا محدود خط مستقیم ہے

اس کے دو برابر حصے کرنے ہیں

اب پر مثلث متساوی الاضلاع ا س ب بناؤ

اور زاویہ ا س ب کے خط س د سے جواب کو نقطہ د پر کاٹو

حصے کرو



تو خط اب کے نقطہ دیر دو برابر حصے ہو جائیں گے  
چونکہ اس برابر ہی ب س کے اور س د وثلث اس د اور ب س میں  
مشترک ہی

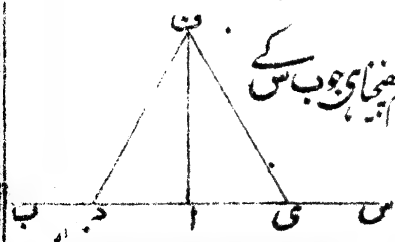
یعنی دو ضلع اس اور س د الگ الگ برابر ہیں و ضلعوں ب س اور  
س د کے اور زاویہ اس د زاویہ ب س د کے برابر بنایا گیا ہے  
اسلئے قاعدہ ا د برابر ہی قاعدہ ب د کے  
اسلئے خط اب کے نقطہ ح پر دو برابر حصے ہو گئے  
اور اسی خط کے دو برابر حصے کرنے کی ضرورت تھی  
اس شکل کے ذریعہ سے ایک محدود خط مستقیم کے چارہ آٹھ اور سولہ وغیرہ برابر حصے ہو سکتے ہیں  
مشق

۱ ثابت کرو کہ اس شکل میں س د خط اب کے ساتھ زاویے قائمے بناتا ہے  
۲ دیے ہوئے محدود خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ بڑھا ہوا حصہ اس خط کا جو دیے ہوئے خط او  
بڑھے ہوئے حصہ سے بیٹے رہتا ہے

### مشکل ۱۱ عملی

دیے ہوئے نقطے سے جو ایک دیے ہوئے خط مستقیم میں ہی ایک ایسا خط  
مستقیم کھینچو جو دیے ہوئے خط کے ساتھ زاویے قائمے بناوے  
منہض کرو کہ ب س دیا ہوا خط مستقیم ہی اور

اس میں ا د یا ہوا نقطہ ہی  
نقطہ سے ایک ایسا خط مستقیم کھینچو جو ب س کے  
ساتھ زاویے قائمے بناتا ہو  
ب اس کوئی نقطہ لے لو



شکل ۳

شکل ۴

اور ای برابر ادا کے بناؤ

یہ دہر ثلث مساوی الاضلاع دایا بناؤ

اور ادا اداؤ

احول ہونے

تو خط مستقیم ان ہونے سے کینچا گیا ہے خط اب اس کے ساتھ نقطہ اپراؤ

قائے بناویگا

چونکہ ای برابر ادا کے بنایا گیا ہے اور ان دو ثلث دایا اور ای ادا

میں مشترک ہے

یعنی وہ ضلع دایا اور ان الگ الگ برابر ہیں و ضلعوں دایا اور ان کے

۱۲

اور قاعدہ دایا برابر قاعدہ دایا کے

شکل ۵

اسلئے زاویہ دایا برابر زاویہ دایا کے ہے

اور یہ زاویہ متضام ہیں

لیکن جب ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر کھڑا ہو کر ان کے زاویہ متضام

بنائے جو ایک دوسرے کے برابر ہوں تو ان زاویوں میں سے ہر ایک کو زاویہ

۱۳

متضام کہتے ہیں

اسلئے زاویوں دایا اور ای ان میں سے ہر ایک زاویہ متضام ہے

اسلئے دایا دایا ہونے سے ہر ایک ہونے سے خط مستقیم اب میں ہے

تو مستقیم ان جو اب اس کے ساتھ زاویہ قائمے بنایا ہے کھلیا

اور ای خط کے کھینچنے کی ضرورت تھی

تیسرے صرح ان شکل کی مدد سے ثابت ہو سکتا ہے کہ دو خط مستقیم متضام

نہیں رہ سکتے اگر ملن ہو تو فرض کرو کہ دو خط مستقیم اب اس اور ادا

اب حصہ مشترک ہے

لفظ ب سے ایسا خط ب ی کھینچو جو اب کے ساتھ  
زاویے قائم بناتا ہو

شکل ۱۱

چونکہ اب سے خط مستقیم فرض کیا گیا ہے  
اس لئے زاویہ س ب ی برابر زاویہ ی ب ا کے ہے  
اور چونکہ اب د بھی خط مستقیم فرض کیا گیا ہے  
اس لئے زاویہ د ب ی بھی برابر زاویہ ی ب ا کے ہے  
اس لئے زاویہ د ب ی برابر زاویہ س ب ی کے ہے  
یعنی چھوٹا زاویہ برابر بڑے زاویہ کے ہے

علوم متعارفہ

علوم متعارفہ ۹

اور یہ ناممکن ہے  
اس لئے دو خط مستقیم حصہ مشترک نہیں رکھتے۔ یہی ثابت کرنا تھا  
یہ نتیجہ صیح اقلیدس میں جو یونانی زبان میں لکھی ہوئی ہے نہیں ہے اسکو تسلیم کرنا چاہیے  
شکل کے ساتھ لگایا می گرا سپرٹرا باہری اعتراض ہو سکتا ہے کیونکہ ہم نہیں جانتے کہ عمود ب ی کی سطح  
کھینچا جائیگا اگر ہم اس کے کھینچنے کے لئے کیا رہنمائی شکل کی مدد لیں تو ضروری ہے کہ ہم اب کو تہ بنائیں  
اور ب ہم اب کو تہ بنائیں گے تو یہ بات مان لینا فرض ہو گا کہ وہ صرف ایک طرح بڑھ سکتا ہے کیونکہ بغیر  
اس بات کے مان لینے کے ہم نہیں جان سکتے کہ صرف ایک ہی عمود ب ی کھینچا جاوے گا اور ب ہم نے  
اب کا صرف ایک ہی طرح بڑھنا مان لیا تو ہم نے اس دعویٰ کو جسے ہم ثابت کرنا چاہتے تھے مان لیا  
اگر حسن مناجب کا نتیجہ صیح تیرہویں شکل کے بعد آوے تو وہ اس طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ اگر  
ممکن ہو تو فرض کرو کہ دو خط مستقیم اب سے اور اب د سے اب حصہ مشترک ہی نقطہ ب سے کوئی خط  
ب ی کھینچو تو زاویہ اب ی اور ی ب س ملکر برابر دو قانونوں کے ہوں گے (شکل ۱۲) اور  
اب ی اور ی ب د بھی ملکر برابر دو قانونوں کے ہوں گے (شکل ۱۳) اس لئے زاویہ اب ی اور ی ب د  
برابر ہوں گے زاویوں اب ی اور ی ب د کے (علوم متعارفہ) اس لئے زاویہ ی ب س برابر زاویہ



ی ب د کے ہوگا (علوم متعارفہ ۳) یعنی کل اپنے ایک ٹکڑے کے برابر ہوگا اور یہ ناممکن ہے  
(علوم متعارفہ ۹) اسلئے دو خط مستقیم حصہ مشترک نہیں رکھتے

اگر تین صاحب کو اس کا خیال کرنا ہی تھا کہ دو خط مستقیم حصہ مشترک رکھتے ہیں یا نہیں تو انکو چاہئے  
تھا کہ اسے پہلے ہی خیال کرتے کیونکہ پانچویں شکل میں اگر دو خط مستقیم اب تک ایک ہی ہوں اور نقطہ  
ب سے جواہوں تو قاعدہ ب سے کے نیچے نقطہ ب پر دو چھوٹے بڑے زاویے پیدا ہوں گے اور یہ  
سے ہر ایک برابر زاویہ ب سے ج کے ہوگا۔ لہذا کوئی یہ بھی کہہ ہی کہ پہلی ہی شکل میں چار پانچ لیا گیا ہو کہ  
خط اس اور ب سے نقطہ میں پر جہاں وہ ملتے ہیں حصہ مشترک نہیں رکھتے

تین صاحب نے اس کی کلیہ بیان کیا رہوں شکل سے چھٹے کہیں نہیں کیا ہے اگر ہم اس نتیجہ صریح کو نکال کر  
دوسریں علوم متعارفہ میں یہ بات زیادہ کر دیں کہ اگر ایک خط مستقیم کے کوئی دو نقطے دو مستقیم  
کے دو نقطوں پر پڑیں تو دونوں خط مستقیم ایک دوسرے پر ان نقطوں کے اندر اور باہر ہوں گے تو ب  
جھسکے تمام ہو جائیں گے

گیا رہوں شکل نویں شکل کی ایک خاص صورت ہے دونوں شکلوں میں ات ایسا خط کھینچا گیا ہے جو  
ب اور س کے ساتھ نقطہ ا پر برابر زاویے بناتا ہے نویں شکل میں خط ب اور س کے ایک کوئی  
تقد نہیں ہے گیا رہوں شکل میں یہ قید ہے کہ ب اور س ایک ہی سیدھے میں ہوں  
دو نقطوں کے درمیان دوری وہ خط مستقیم جو ان نقطوں کو ملتا ہے اور ایک نقطہ کی ایک خط  
مستقیم سے دوری وہ چھوٹے سے چھوٹا خط مستقیم جو اس نقطے سے اس خط تک کھینچا جائے

مش

۱ دے ہوئے خط مستقیم میں ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اس کی دوری دو دہرے ہوئے نقطوں  
سے برابر ہو اور یہ بھی بتاؤ کہ کس حالت میں نقطہ نہ دریافت ہو سکیگا

۲ دو نقطوں سے جو ایک دے ہوئے خط کے آٹھ سائے کی ہمتوں میں ہیں ایسے  
وہ دے ہوئے خط پر ہیں اور ان کے درمیان کے راستے کے دیے ہوئے خط سے دو برابر ہوں گے

بھی بیان کر کہ کس حالت میں ان نقطوں کا کھینچنا ناممکن ہوگا

۳ مثلث کے تینوں ضلعوں پر ان کے بیچوں بیچ کے نقطوں سے جو خط ان ضلعوں کے ساتھ متوازی  
قلمے بناتے ہوئے کھینچے جائیں گے وہ سب ایک ہی نقطہ ملیں گے

### شکل ۱۲ عملی

دیے ہوئے غیر محدود خط مستقیم پر دیے ہوئے نقطہ سے جو خط مستقیم کے باہر سے ایک عمود والو  
قرض کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم پر جسکو دونوں طے قہنا جا ہو پڑھا سکتے ہو

س دیا ہوا نقطہ اسکے باہر ہے

نقطہ س سے خط مستقیم اب پر ایک عمود ڈالنا ہے

اب کے دوسری طرف میں کوئی نقطہ دے لے

اور س مرکز سے س د دوری پر دائرہ ج کھینچو اب تین اس پر

تین ج کے نقطہ پر دو برابر حصے کرو

اور س لا ملاؤ

تو س لا جو نقطہ س سے کھینچی گیا ہے دیے ہوئے خط اب پر عمود ہوگا

س ت اور س ج ملاؤ

چونکہ ت لا برابر ج کے بنایا گیا ہے اور س د و مثلثات کا س اور

ج د میں مشترک ہے

یعنی دو متساوی ت اور س د و ضلعوں ج کا اور وہی الگ الگ برابر ہیں

اوتقاعدہ س ت برابر قاعدہ س ج کے ہے

اسلئے زاویہ ت د س برابر زاویہ ج د س کے ہے

اور یہ زاویہ یہ متصل ہیں

لیکن جب ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر کھینچا ہو کر زاویہ متصلہ برابر بنائو

نوائے زاویوں میں سے ہر ایک کو زاویہ قائمہ کہتے ہیں اور کھڑے خط مستقیم کو دوسرے خط مستقیم پر عمود۔ اسلئے اس خط اب پر عمود ہے۔

اسلئے نقطہ سے جو دے ہوئے خط مستقیم اب کے باہری عمود سے ۸

خط اب پر کھینچا اور اسی عمود کے کھینچنے کی ضرورت تھی

اس شکل میں اس بات کو مان لیا جائے کہ دائرہ خط اب کو دو نقطوں پر کاٹے گا کیونکہ جب ہم خیال کرتے ہیں کہ دائرہ کے محیط کا ایک ایک حصہ اب کے دونوں طرف سے محیط ایک قسم کا لگانا خط ہے تو یہ ظاہر معلوم ہوتا ہے کہ محیط دو مرتبہ خط مستقیم اب کو کاٹتا ہو گا اگرچہ دیکھ لیں تو خط میں غیب سے دو ہونگی قیاس کی گئی ہے کیونکہ اگر یہ قیاس ہی تو یہ ممکن تھا کہ خاص حالتوں میں دائرہ خط اب کو کسی جگہ پر نہ کاٹتا یا صرف ایک ہی جگہ پر کاٹتا

اکیلے میں نے خط زاویے قائمے بناتے ہوئے اور خط عمود میں ہم منحنی رکھا ہے کہ جب خط کسی دوسرے خط کے ایک نقطہ سے گزیرا ہو تو شکل کے مطابق کھینچا گیا ہے اسکو اکیلے میں نے زاویے قائمے بنانا ہر خط کا ہے اور جب خط کسی نقطہ سے جو دوسرے خط کے باہری یا بیرونی شکل کے مطابق اس خط پر لگایا جائے اسکو انیسویں عمود کہا جائے لیکن زمانہ حال کے لکھنے والے اس فرق کا کچھ خیال نہیں کرتے اور کچھ کو دوسرے کی جگہ استعمال کرتے ہیں

مشق

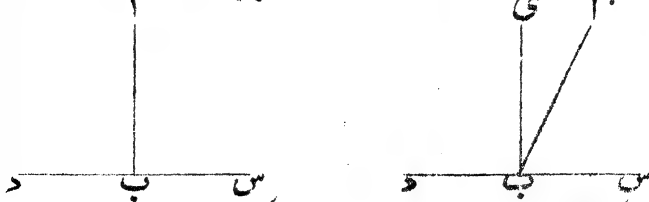
اگر کسی مثلث کی راس شفاغہ پر عمود ڈالا جائے اور وہ عمود اس قائمہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرے تو یہ مثلث متساوی الساقین ہوگا

### شکل ۱۳۱ اشباتی

جو زاویے ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم کے ساتھ اس کے ایک طرف بنائے وہ یا تو دو قائمے ہوتے ہیں یا دونوں ملکر برابر دو قائموں کے ہوتے ہیں فرض کرو کہ خط مستقیم اب خط مستقیم س د کے ساتھ اس کے ایک طرف

س ب اور اب د بناتا ہے

تو یہ زاویے یا تو دو قائلے ہوں گے یا ملکر برابر دو قائلوں کے ہوں گے



کیونکہ اگر زاویہ س ب ا برابر زاویہ اب د کے ہے

تو ہر ایک انہیں سے زاویہ قائمہ ہے

اگر زاویہ س ب ا برابر زاویہ اب د کے نہیں ہے

نقطہ ب سے س د کے ساتھ زاویے قائلے بنائے ہوں خط بی کھینچو

تو زاویے س بی اوری د دو قائلے ہیں

چونکہ زاویہ س بی ا برابر دو زاویوں س ب ا اور اب د کے ہے

ان دونوں برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ بی د ملاؤ

اسلئے زاویہ س بی اوری د برابر ہیں تین زاویوں س ب ا اور

اب د اوری ب د کے

پھر چونکہ زاویہ د ب ا برابر زاویوں د بی اوری ب ا کے ہے

اور ان دونوں برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ اب س ملاؤ

اسلئے زاویے د ب ا اور اب س برابر ہیں تین زاویوں د بی اوری ب

اور اب س کے

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ زاویے س بی اوری ب د بھی انہیں تین

زاویوں کے برابر ہیں

اور جو چیزیں ایک ہی چیز کے برابر ہوتی ہیں وہ آپس میں برابر ہوتی ہیں

علوم متعارفہ

اسلئے زاویے س بی بی اوری با د لکر برابر زاویوں دب اور اب س کے ہیں

لیکن زاویے س بی بی اوری با د دو قائمے ہیں  
اسلئے زاویے دب اور اب س لکر برابر دو قائموں کے ہیں معلوم تھا  
اسلئے جو زاویے ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم کے ساتھ الخ - یہی ثابت کرنا تھا

تیسرے صریح ا سب زاویے جو کئی خط مستقیم کسی خط مستقیم کے ایک نقطہ پر اسکے ایک طرف بنائے ہیں لکر برابر دو قائموں کے ہوتے ہیں

تیسری شکل کے دعوے میں اس عبارت کا کہ اسکے ساتھ زاویے بنانا ہی ہونا ضروری کہو کہ اگر یہ عبارت نہ ہو تو شکل کی ایک پہلی صورت ہوگی کہ ایک خط دوسرے خط کے رستہ پر کھڑا ہو اور اس صورت میں صرف ایک زاویہ بنے گا

اگر دو زاویے لکر برابر دو قائموں کے ہوں تو انہیں سے ہر ایک کو دوسرے کا قہمہ کہتے ہیں اور اگر دو زاویے لکر ایک قائمہ کے برابر ہوں تو انہیں سے ہر ایک دوسرے کا تہائی قائمہ ہی مشق

اگر زاویہ ب اس کی ساق با اس کی طرف دنگ بڑھائی جائے اور خط ای اور اف زاویوں ب اس اور س اد کے دو برابر حصے کریں تو ثابت کرو کہ زاویہ ی اف قائمہ ہی

شکل ۱۴ اثبات  
اگر کسی خط مستقیم کے ایک نقطہ پر دو اور خط مستقیم اسکے آئنے سامنے کی طرف سے انکر زاویے متعلقہ برابر دو قائموں کے بنائیں تو یہ دونوں خط مستقیمہ اک خط مستقیم میں ہوں گے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کے ب نقطہ پر دو خط مستقیم س با س با

خط اب کی آئنے سامنے کی طرف سے آنکر زاویے متصلہ س ب اور اب برابر  
دو قانوں کے بناتے ہیں

تو س ب اور د ب ایک ہی خط مستقیم میں ہوں گے  
اگر د ب اور ب س ایک ہی خط مستقیم میں نہوں  
تو فرض کرو کہ ی ب اور ب س ایک ہی خط مستقیم میں ہیں  
چونکہ خط اب خط س ب ی سے نقطہ ب پر ملتا ہے

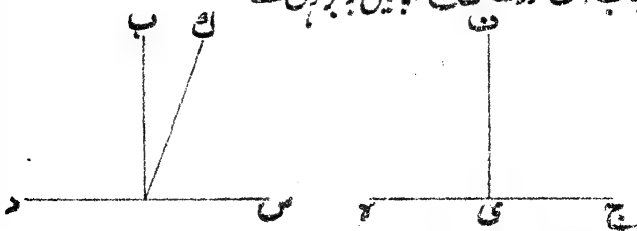
اسلئے زاویے متصلہ س ب اور اب ی ملکر برابر دو قانوں کے ہیں  
لیکن زاویے س ب اور اب د بھی ملکر برابر دو قانوں کے ہیں  
اسلئے زاویے س ب اور اب د برابر زاویوں س ب اور اب س ی ہیں  
ان برابروں میں سے زاویہ س ب انحال ڈالو

اسلئے باقی زاویہ اب د برابر ہی باقی زاویہ اب ی کے  
یعنی کل اپنے ایک ٹکڑے کے برابر ہی اور یہ ناممکن ہے  
اسلئے ی ب اور ب س ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں  
اور یہ طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ سوا س ب کے کوئی اور خط مستقیم س ب  
کے ساتھ ملکر ایک خط مستقیم نہیں ہو سکتا

اسلئے ب د ہی ب س کے ساتھ ملکر ایک خط مستقیم ہوا  
اسلئے کسی خط مستقیم کے ایک نقطہ پر الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
یہ شکل تیزوین شکل کا عکس ہے اور اسکو ثبوت بہ خلف سے ثابت کیا ہے اس شکل میں خط س ب  
اور د ب کے خط اب کی آئنے سامنے کی طرفوں سے آنکر ملنے کی قید ضروری اگر یہ قید نہ ہو تو یہ ممکن ہے  
کہ جو زاویے دو خط مستقیم کسی شے کے ساتھ بنادیں وہ دو قانوں کے برابر ہوں لیکن دونوں خط

ایک ہی خط مستقیم میں نہوں

طالب علم کو غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ زاویے  $\angle$  ب ا اور  $\angle$  ا ب ی کو زاویوں میں  $\angle$  اب اور  $\angle$  اب د کے برابر ثابت کرنے میں پہلے اور گیارہویں علوم متعارفہ دونوں کا حکم لگانا ضروری ہے۔ تاہم ہنٹر صاحب نے گیارہویں علوم متعارفہ کو اس طرح ثابت کیا ہے اور اس ثبوت پر اقلیدس کے اصول کی رو سے کوئی اعتراض نہیں ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ خط  $\angle$  اب خط  $\angle$  ا د کے ساتھ نقطہ  $\angle$  ب پر زاویے قائمے بناتا ہے اور خط  $\angle$  ی ف خط  $\angle$  ی ک کے ساتھ نقطہ  $\angle$  ی پر زاویے قائمے بناتا ہے۔



کوئی لمبائی اس لئے ہو اور ا د اور  $\angle$  ک اور  $\angle$  ی ج ان سب کو اس کے برابر بناؤ۔ خط  $\angle$  ب ی ج کو خط  $\angle$  ا س پر اس طرح رکھو کہ نقطہ  $\angle$  ب پر ہو اور خط  $\angle$  ب ج کی طرف خط  $\angle$  د س کی طرف پہنچو اور نقطہ  $\angle$  ب ا پر خط  $\angle$  د س کے ایک ہی سمت میں ہوں تو نقطہ  $\angle$  ج نقطہ  $\angle$  س پر پڑے گا اور نقطہ  $\angle$  ی نقطہ  $\angle$  ف پر پڑے گا اگر خط  $\angle$  ی ف خط  $\angle$  ا ب پر پڑے گا تو کسی اور جگہ پر  $\angle$  ا کے طرح واقع ہو تو زاویہ  $\angle$  ک ی ف برابر زاویہ  $\angle$  د ا س کے ہوگا اور زاویہ  $\angle$  ی ف ج برابر زاویہ  $\angle$  ا س ا کے لیکن زاویہ  $\angle$  ک ی ف اور  $\angle$  ی ف ج بموجب فرض کے آپس میں برابر ہیں اسلئے زاویہ  $\angle$  د ا س اور  $\angle$  ا س آپس میں برابر ہیں لیکن زاویہ  $\angle$  د ا ب اور  $\angle$  ا ب اس بھی بموجب فرض کے آپس میں برابر ہیں اور زاویہ  $\angle$  ا ب زاویہ  $\angle$  ا س سے برابر اسلئے زاویہ  $\angle$  ا ب زاویہ  $\angle$  ا س سے برابر ہے اور زاویہ  $\angle$  ا س زاویہ  $\angle$  ا ب سے اور بھی زیادہ برابر ہے لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ زاویہ  $\angle$  ا ب زاویہ  $\angle$  ا س کے برابر ہے اسلئے زاویہ  $\angle$  ا ب زاویہ  $\angle$  ا س کے برابر اور اس سے برابر بھی  $\angle$  ی اور  $\angle$  ی ف جھوٹھ بات ہے اسلئے خط  $\angle$  ی ف خط  $\angle$  ا ب پر پڑتا ہے اور اسلئے زاویہ  $\angle$  ی ف ج اور  $\angle$  ا ب آپس میں برابر ہیں۔

## شکل ۱۵ اثباتی

اگر دو خط مستقیم آپس میں ایک دوسرے کو کاٹیں تو زاویے متقابلہ برابر ہوں گے  
فرض کرو کہ دو خط مستقیم اپ اور سی د ایک دوسرے کو نقطہ ی پر کاٹتے ہیں  
تو زاویہ ی س برابر ہوگا زاویہ دی ب کے  
اور زاویہ ای د برابر ہوگا زاویہ سی ب کے  
چونکہ خط ای خط س کے ساتھ نقطہ ی پر زاویے متقابلہ سی ی اور ای د بنائے

یہ دونوں زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہیں  
پھر چونکہ خط دی خط اب کے ساتھ نقطہ ی پر زاویے متصلہ پی ی د اور دی ب بنائے  
یہ دونوں زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہیں

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ زاویے سی ی اور ای د برابر دو قائموں کے ہیں  
اسلئے زاویے سی ی اور ای د برابر ہیں زاویوں ب ی د اور ای د کے  
ان برابروں میں سے زاویہ ای د نکال ڈالو

اسلئے باقی زاویہ سی ی برابر ہی باقی زاویہ ب ی د کے  
اور اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویہ سی ی ب برابر ہی زاویہ ای د کے  
اسلئے اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کو کسی نقطہ پر کاٹیں الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا  
یہ شکل زاویہ کی تعریف سے بھی ظاہر ہے کیونکہ اگر زاویہ کی ساقیں راس کی طرف بڑھائی جائیں

بڑے ہوئے حصوں کا جھکاؤ ایک دوسرے کی طرف دی ہو ساقوں کا ایک دوسرے کی طرف ہی  
نتیجہ صریح ۱۔ اس شکل سے ظاہر ہے کہ اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کو کسی نقطہ پر  
کاٹیں تو اُس نقطہ پر کے چاروں زاویے ملکر برابر چار قائموں کے ہوں گے  
نتیجہ صریح ۲۔ اور اس لئے سب اوپر جو کئی خط مستقیم کے ایک نقطہ پر ملنے  
سے بنیں گے ملکر برابر چار قائموں کے ہوں گے



اقلیدس نے اس شکل کے عکس یعنی اس شکل کو کہ اگر چار خط مستقیم ایک نقطہ پر ملکر چار زاویے ایسے بنائیں کہ انہیں سے آٹھ سائے کے دو دو زاویے آپس میں برابر ہوں تو ان خطوں میں سے دو دو خط ایک ایک خط مستقیم ہوں گے نہیں ثابت کیا ہی وہ اس طرح ثابت ہو سکتی ہے

فرض کرو کہ چار خط ای اور سی اور بی اور دی اور دی نقطہ ی پر ملکر ایسے چار زاویے بنائے ہیں کہ انہیں سے آٹھ سائے کے دو دو زاویے برابر ہیں

یعنی زاویے ای سی اور بی د آپس میں برابر ہیں اور زاویے سی بی اور ای د آپس میں برابر ہیں تو خط ای اور بی ایک خط مستقیم ہیں اور سی اور دی ایک خط مستقیم ہیں ہوں گے

چونکہ زاویہ ای سی برابر ہے زاویہ بی د کے اور زاویہ سی بی برابر ہے زاویہ ای د کے اسلئے زاویے ای سی اور سی بی برابر ہوں گی اور دی کے یہ معلوم ہوتا ہے

لیکن یہ چاروں زاویے ملکر برابر چار قانون کے ہیں (شکل ۵ کا نتیجہ ص ۲) اسلئے زاویہ ای سی اور سی بی برابر ہوں گے اور اسلئے ای اور سی ایک ہی خط مستقیم ہیں

اور اس طرح پہلے بھی ثابت ہو سکتی ہے کہ سی اور دی ایک ہی خط مستقیم ہیں

### شکل ۱۶ اثباتی

اگر کسی مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو زاویہ خارجہ اپنے سائے کے ہر ایک زاویہ

داخلہ سے بڑا ہوگا

فرض کرو کہ مثلث اب س کا ضلع ب س کسی نقطہ تک بڑھایا گیا ہو

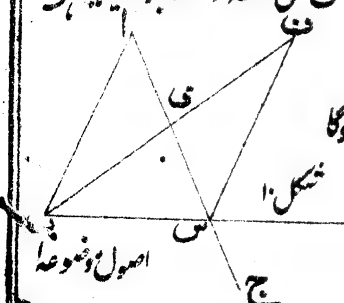
تو زاویہ خارجہ اس دا اپنے سائے کے

ہر ایک زاویہ داخلہ سے اب اور اب س سے بڑا ہوگا

اس کے سی بڑو برابر ہے کہ

اصول موضوعہ

اور بی ملاؤ



اصول موضوعہ

شکل ۳

اصول موضوعہ

ب ی کو کسی نقطہ تک بڑھاؤ

اور ی ت برابر ب ی کے کاٹ لو

اور س ت ملاؤ

چونکہ ی س برابر ای کے اور ی ت برابر ب ی کے بنایا گیا ہے  
لہذا دو مثلث اب ی اور س ت ی میں دو ضلع ای اور ی ب مشترک  
س ی اور ی ت کے الگ الگ برابر ہیں

اور زاویہ ای ب زاویہ س ی ت کے برابر ہیں

اسلئے قاعدہ اب قاعدہ س ت کے برابر ہے اور مثلث اب ی برابر ہے مثلث  
س ت ی کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہیں باقی زاویوں  
دوسرے مثلث کے یعنی وہ زاویے آپس میں برابر ہیں جنکے سامنے برابر ضلع ہیں شکل ۳  
اسلئے زاویے ب ای برابر ہیں زاویہ ت س ی کے

لیکن زاویہ اس د زاویہ ت س ی سے بڑا ہے

اسلئے زاویہ اس د زاویہ ب اس سے بڑا ہے

اسی طرح اگر اس نقطہ ج تک بڑھایا جائے اور ب س کے دو برابر حصے کئے

جائیں یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویہ ب س ج زاویہ اب س سے بڑا ہے

لیکن زاویہ ب س ج زاویہ اس د کے برابر ہے

اسلئے زاویہ اس د زاویہ اب س سے بڑا ہے

اسلئے اگر کسی مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو زاویہ خارج الخ - یہی ثابت کرنا تھا

مشق

ا کسی خط مستقیم پر ایک نقطہ سے ایک سے زیادہ عمود نہیں گرا سکتے ہیں

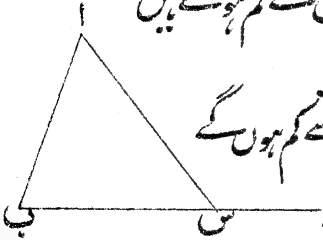
ب اگر کسی نقطہ سے ایک خط مستقیم جو ایک دے ہوئے خط مستقیم کے ساتھ ایک زاویہ منفرجہ اور

ایک زاویہ حادہ بناوے کے کھینچا جائے اور اسی نقطہ سے اُس دیے ہوئے خط پر ایک عمود گرایا جائے  
تو ثابت کرو کہ عمود زاویہ حادہ کی طرف گریگا

۳ ایک نقطہ سے کسی خط سے تقریباً دو سے زیادہ برابر خط نہیں کھینچ سکتے ہیں

### مشکل ۱۱ اثباتی

ثلاثت کے ہر دو زاویے ملکر دو قائموں سے کم ہوتے ہیں



قرض کرو کہ اب اس ایک ثلاثت ہی  
تو اُس کے ہر دو زاویے ملکر دو قائموں سے کم ہوں گے

کسی ضلع ب س کو د تک بڑھاؤ  
چونکہ اس د ثلاثت اب س کا زاویہ خارجہ ہے

اس لئے زاویہ اس دلپنے سامنے کے زاویہ داخلہ اب س سے بڑا ہے شکل ۱۲  
ان دونوں برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ اس ب زیادہ کرو

اس لئے زاویے اس د اور اس ب ملکر زاویوں اب س اور اس ب

سے بڑے ہیں

لیکن زاویے اس د اور اس ب ملکر برابر دو قائموں کے ہیں شکل ۱۳

اس لئے زاویے اب س اور اس ب ملکر دو قائموں سے کم ہیں

اسی طرح یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویے ب اس اور اس ب ملکر دو

قائموں سے کم ہیں اور زاویے ب اس اور اب س بھی ملکر دو قائموں سے کم ہیں

اس لئے ثلاثت کے ہر دو زاویے الخ - یہی ثابت کرنا تھا

ابن مشکل کو اس طرح بھی ثابت کرتے ہیں



قرض کرو کہ اب اس ایک ثلاثت ہی اُس کے ہر دو زاویے ملکر دو قائموں سے کم ہوں گے

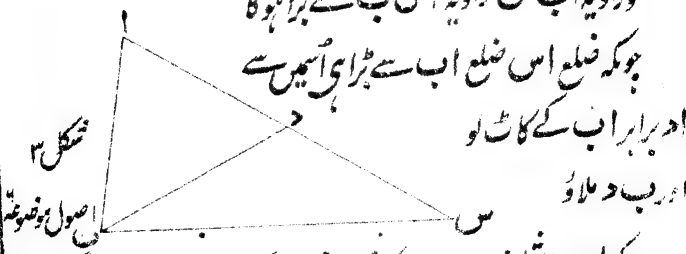
ضلع ب س میں کوئی نقطہ نہ لو اور ا د ملاؤ

چونکہ زاویہ ادب اس زاویہ اب اس سے اور زاویہ ادب زاویہ اس سے بڑا ہی  
 اسلئے زاویہ ادب اور ادب ملکر زاویوں اس ب اور اب اس سے بڑے ہیں  
 لیکن زاویہ ادب اور ادب ملکر برابر دو قائموں کے ہیں  
 اسلئے زاویہ اس ب اور اب اس ملکر دو قائموں سے کم ہیں  
 اسی طرح یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ زاویہ ب اس اور اس ب ملکر دو قائموں سے کم ہیں  
 اور زاویہ ب اس اور اب اس بھی دو قائموں سے کم ہیں  
 یہ تین مکمل زاویوں علوم متعارفہ کا عکس ہے یہ تین مکمل زاویوں میں تین مکمل زاویوں میں شامل ہیں  
 مشق

ثالث کے تینوں زاویہ داخلہ ملکر تین قائموں سے کم ہوتے ہیں  
 ثالث کے دو زاویہ خارجہ ملکر دو قائموں سے اور تین زاویہ خارجہ ملکر تین قائموں سے  
 زیادہ ہوتے ہیں

### شکل ۱۸ اثباتی

ہر مثلث میں بڑے ضلع کے سامنے کا زاویہ بڑا ہوتا ہے  
 فرض کرو کہ اب اس ایک مثلث ہے اور اس کا ضلع اس ضلع اب سے بڑا ہی  
 تو زاویہ اب اس زاویہ اس ب سے بڑا ہوگا  
 چونکہ ضلع اس ضلع اب سے بڑا ہی اس میں سے  
 اور برابر اب کے کاٹ لو  
 اور ب د ملاؤ



چونکہ ادب مثلث د ب س کا زاویہ خارجہ ہے  
 اسلئے زاویہ ادب اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ب س د سے بڑا ہی  
 لیکن زاویہ ادب برابر ہی زاویہ اب د کے کیونکہ اب برابر ہی اد کے  
 شکل ۱۹

اسلئے زاویہ اب دہرائی زاویہ ب س اسے  
 اسلئے زاویہ اب س اور زیادہ بڑائی زاویہ ب س اسے  
 اسلئے مثلث کے بڑے ضلع کے سامنے کا زاویہ الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا  
 نتیجہ صریح مثلث مختلف الاضلاع کے زاویے نابرابر ہوتے ہیں

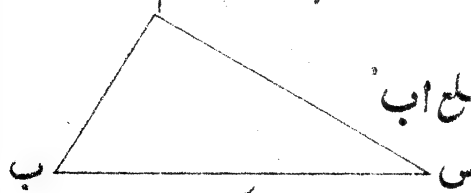
مشق

ذو الرقبۃ الاضلاع اب س د کا ضلع اد س ضلعوں سے بڑائی اور ضلع ب س سب  
 ضلعوں سے چھوٹائی ثابت کرو کہ زاویہ اب س زاویہ اد س سے اور زاویہ ب س زاویہ د سے بڑائی

## شکل ۱۹ اثباتی

یہ مثلث میں بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع پڑا ہوتا ہے  
 فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہے اور اس کا زاویہ اب س زاویہ

اس ب سے بڑائی  
 تو ضلع اس ضلع اب  
 سے بڑا ہوگا



اگر ضلع اس ضلع اب سے بڑا نہیں ہے تو وہ اس کے برابر ہے یا اس سے چھوٹا ہے  
 اگر اس برابر ہے اب کے تو زاویہ اب س بھی برابر ہے زاویہ اس کے (شکل ۱۰)

لیکن یہ زاویے آپس میں برابر نہیں ہیں  
 اسلئے اس بھی برابر نہیں ہے اب کے

اگر اس چھوٹا ہے اب سے تو زاویہ اب س بھی چھوٹا ہے زاویہ اس کے (شکل ۱۱)  
 لیکن زاویہ اب س زاویہ اس ب سے چھوٹا نہیں ہے

اسلئے اس بھی چھوٹا نہیں ہے اب سے

اور یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اس برابر بھی نہیں ہے اب کے  
اسلئے اس بڑا ہی اب سے

اسلئے ہر مثلث میں بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا  
یہ مثلث اٹھارہویں شکل کا عکس ہے اور چھٹی شکل کے ساتھ وہی علاقہ رکھتی ہے جو اٹھارہویں شکل کا چوبیس  
شکل کے ساتھ رکھتی ہے یہ علاقہ ان شکلوں میں سے دو دو کو ملا کر اس طرح بیان کرنے سے معلوم ہوگا  
مثلث کا ایک زاویہ اس کے دوسرے زاویہ کے برابر (شکل ۵) یا اس سے بڑا یا چھوٹا (شکل ۶) ہوگا  
جیسا کہ پہلے زاویہ کے سامنے کا ضلع دوسرے زاویہ کے سامنے کے ضلع کے برابر یا اس سے بڑا یا  
چھوٹا ہو اور مثلث کا ایک ضلع اس کے دوسرے ضلع کے برابر (شکل ۶) یا اس سے بڑا یا چھوٹا (شکل ۷) ہوگا  
جیسا کہ پہلے ضلع کے سامنے کا زاویہ دوسرے ضلع کے سامنے کے زاویہ کے برابر یا اس سے بڑا یا چھوٹا ہوگا  
ان چار شکلوں کے آپس کے علاقہ کو ہم اس طرح بر بھی بیان کر کے ظاہر کرتے ہیں

شکل ۵ - اگر ضلع اب = ضلع اس	تو	زاویہ اس = زاویہ اب
شکل ۶ - اگر زاویہ اس = زاویہ اب	تو	ضلع اب = ضلع اس
شکل ۷ - اگر ضلع اب < ضلع اس	تو	زاویہ اس < زاویہ اب
شکل ۸ - اگر زاویہ اس < زاویہ اب	تو	ضلع اب < ضلع اس

### مشق

۱ خط اد مثلث اب س کے زاویہ اس کے دو برابر حصے کرنا ہے اور اس کے ضلع اب س سے نقطہ ح

پر ملنا ہے ثابت کرو کہ ب ا بڑا ہی اب د سے اور س ا بڑا ہی س د سے

۲ اگر مربع کے کسی زاویہ اسے ایک خط اس زاویہ کے سامنے کے ضلعوں میں سے ایک کے ساتھ ملو  
اور دوسرے ضلع کے بڑے حصے ہوئے حصہ سے نقطہ ف پر ملنا ہو ا کھینچا جائے تو اس میں سے خط عمود

۳ جتنے خط متقیتم کسی نقطہ سے ایک لے ہوئے خط متقیتم تک کھینچ جائیں ان میں سے عمود  
سے چھوٹا ہوگا اور جو خط عمود کے نزدیک ہوگا وہ دور کے خط سے چھوٹا ہوگا

## مشکل ۲۰ اثباتی

مثلث کے ہر دو ضلع ملکر تیسرے سے بڑے ہوتے ہیں

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہے

تو اس کے ہر دو ضلع ملکر تیسرے ضلع سے بڑے ہوں گے

یعنی ب ا اور اس ملکر ب س سے اور اب اور ب س ملکر اس سے اور ب س اور س ملکر اب سے بڑے ہوں گے

اصول موضوعہ ۲

ب ا کو کسی نقطہ تک بڑھاؤ

مشکل ۳

اد برابر اس کے بناؤ

اصول موضوعہ ۱

اور د س ملاؤ

چونکہ اد برابر اس کے بنا ہے

مشکل ۵

اس لئے زاویہ اس د برابر ہی زاویہ اد س کے

علوم متعارفہ ۹

لیکن زاویہ ب س د زاویہ اس د سے بڑا ہے

اس لئے زاویہ ب س د زاویہ اد س سے بھی بڑا ہے

چونکہ مثلث د ب س میں زاویہ ب س د بڑا ہے زاویہ ب د س سے اور

مشکل ۱۹

بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہے

اس لئے ب د بڑا ہے ب س سے

لیکن ب د برابر ہی ب ا اور اس کے کیونکہ اد برابر ہی اس کے

اس لئے ب ا اور اس ملکر بڑے ہیں ب س سے

اسی طرح یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اب اور ب س ملکر اس سے

اور ب س اور س ملکر اب سے بڑے ہیں

اس لئے مثلث کے ہر دو ضلع الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یاد رکھو کہ جن دو ضلعوں کو تیسرے ضلع سے برابرت کرنا چاہتے ہو ان دو ضلعوں میں سے کسی ایک ضلع کو اس طرح بڑھانے سے چہرہ دو دونوں ضلعے ملتے ہوں اور بڑے ہوئے حصہ کو دوسرے ضلع کی برابر بنانے سے یہ شکل ثابت ہوگی

یہ شکل اس طرح بھی ثابت ہو سکتی ہے فرق کرو کہ اب اس ایک مثلث ہی تو اسکے کوئی سے دو ضلعے اب اور اس ملکر تیسرے ضلع ب س سے بڑے ہوں گے

اگر اب اور اس میں سے کوئی ایک ب س کے برابر یا اس سے بڑا ہی تو وضاحت ظاہر ہے کہ اب اور اس ملکر ب س سے اب بھی زیادہ بڑے ہوں گے اگر اب اور اس میں سے کوئی ب س سے بڑا نہیں

ہی تو ب س میں سے ب ج برابر اب کے کاٹ لو اور اد ملاؤ چونکہ اس مثلث اب د کا زاویہ خارجی اسلئے زاویہ ادس بڑا ہی زاویہ ب اد سے (شکل ۱۶) لیکن زاویہ ب اد برابر ہی زاویہ اد ب کے

(شکل ۱۷) اسلئے زاویہ ادس بڑا ہی زاویہ اد ب سے لیکن زاویہ اد ب مثلث ادس کا زاویہ خارجی ہی اور بڑا ہی زاویہ د اس سے (شکل ۱۸) اسلئے زاویہ ادس اور بھی زیادہ بڑا ہی زاویہ د اس سے

اور چونکہ بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہے (شکل ۱۹) اسلئے اس بڑا ہی س د سے اور ب برابر اب کے بنایا گیا ہے اسلئے ب اور اس ملکر بڑے ہیں ب د اور دس سے یعنی ب س سے

یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کا یہ نتیجہ صریح ہو سکتا ہے کہ دو نقطوں کے درمیان خط مستقیم سب سے چھوٹی دوری ہے کیونکہ نقطہ ا خط ب س سے کیسا ہی نزدیک کیوں نہ ہو ب س ہمیشہ ب اور اس سے چھوٹا ہی ہوتا ہے

### مشق

۱ مثلث کے دو ضلعوں میں فرق تیسرے ضلع سے چھوٹا ہوتا ہے

۲ مثلث کے تینوں ضلعے ملکر کسی ایک ضلع کے دونوں سے بڑے ہوتے ہیں

۳ اگر کسی نقطہ سے کسی مثلث کے تینوں زاویوں تک تین خط مستقیم کھینچے جائیں تو یہ تینوں خط

ملکر مثلث کے تینوں ضلعوں کے آدھے سے بڑے ہوں گے



۴ ذواربہ الاضلاع کے چاروں ضلع ملکر اُسکے دونوں قطروں سے بڑے ہوتے ہیں

۵ مثلث کے دو ضلع ملکر اُس خط مستقیم کے جو تیسرے ضلع کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے اُس ضلع کے سامنے کے زاویہ تک کھینچا جائے دونوں سے بڑے ہوں گے

۶ اگر کسی نقطہ سے کسی ذواربہ الاضلاع کے چاروں زاویوں تک چار خط مستقیم کھینچے جائیں

تو وہ چاروں خط ملکر ذواربہ الاضلاع کے چاروں ضلعوں کے آدھے سے بڑے ہوں گے

۷ دیے ہوئے خط مستقیم میں ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اُسکی دو دریاں دو نقطوں سے جو دیے

ہوئے خط کے ایک ہی سمت میں ہیں ملکر اُس خط کے اور نقطوں میں سے ہر ایک کی دو دریاں کم ہوں

### شکل ۲۱ ابتدائی

اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے سروں سے دو خط مستقیم ایک نقطہ تک جو

اُس مثلث کے اندر ہی کھینچے جائیں تو یہ دونوں خط مستقیم ملکر مثلث کے باقی ضلعوں

سے چھوٹے ہوں گے لیکن اُن خطوں کے درمیان کا زاویہ اُن ضلعوں کے

درمیان کے زاویہ سے بڑا ہوگا

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہی اور او اُسکے ضلع ب س کے سروں سے

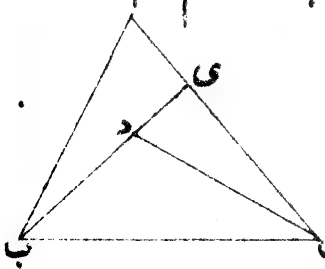
اور س سے نقطہ د تک جو مثلث کے اندر ہی خط مستقیم ب د اور س د کھینچے

تو ب د اور د س ملکر مثلث کے

دو اضلعوں ب ا اور اس سے چھوٹے

ہوں گے لیکن اُنکے درمیان کا زاویہ ب س

مثلث کے زاویہ ب ا س سے بڑا ہوگا



ب د کو بڑھاؤ کہ وہ اس سے نقطہ ہی پر ملے

جو کہ مثلث کے دو ضلع ملکر تیسرے ضلع سے بڑے ہوتے ہیں

اسلئے مثلث اب ی کے دو ضلع ب ا اور ا ی بڑے ہیں ضلع ب ی سے

ان نابرابروں میں سے ہر ایک میں سی سی زیادہ کرو  
توب اور اس ملکر بڑے ہوئے بی اوری سی سے علوم متعارفہ  
اور چونکہ مثلث سی سی کے دو ضلعے سی سی اوری بڑے ہیں ضلع  
سی سی سے

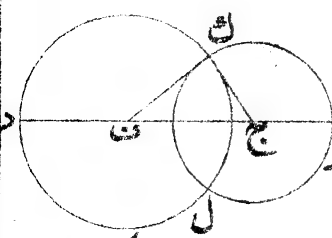
اور ان نابرابروں میں سے ہر ایک میں دب زیادہ کرو  
تو سی سی اوری ب ملکر بڑے ہوئے سی سی اور دب سے علوم متعارفہ  
لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ سی اور اب ملکر بڑے ہیں سی سی اوری سی سے  
اسلئے دب اور اس اور بھی زیادہ بڑے ہیں دب اور دب سے  
پھر چونکہ مثلث کا زاویہ خارجہ اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ سے بڑا ہوتا ہے شکل ۱۶  
اسلئے مثلث سی سی کا زاویہ خارجہ دب سی بڑا ہی زاویہ داخلہ سی سی کے  
اسی دلیل سے مثلث اب سی کا زاویہ خارجہ سی سی بڑا ہی زاویہ داخلہ  
پ اس سے

اسلئے زاویہ دب سی اور بھی زیادہ بڑا ہی زاویہ دب اس سے  
اسو اسلئے اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے سروں سے الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
اس شکل میں اگر مثلث کے ضلع کے سروں سے خط مستقیم کھینچے جانے کی توجہ ہو تو یہ ممکن  
ہو سکتا ہے کہ دو خط مستقیم جو اس ضلع کے کسی اور دو نقطوں سے کھینچے جائیں مثلث کے باقی دو ضلعوں سے  
جیسے یا ان کے برابر ہوں لیکن وہ تو خط ملکر ان ضلعوں کے دونوں سے ہمیشہ کم ہیں گے اگر ضلع جس کے سروں  
سے خط مستقیم کھینچے جائیں مثلث متساوی الاضلاع کا ضلع ہو یا ایسے مثلث متساوی الساقین کا  
قاعدہ ہو کہ کسی ہر ساق قاعدہ سے بڑی ہو تو ضلع کے سروں سے خط مستقیم کھینچے جانے کی قید کی کچھ ضرورت نہیں  
ہی دونوں خط مستقیم ملکر خواہ وہ ضلع کے سروں سے یا اس ضلع کے کسی اور دو نقطوں سے کھینچے گئے ہوں  
مثلث متساوی الاضلاع کے باقی ضلعوں یا مثلث متساوی الساقین کی ساقوں سے چھوٹے ہوں گے

## مشکل ۲۲ علی

ایک مثلث بناؤ جسکے ضلع الگ الگ برابر ہوں دیے ہوئے ایسے تین خط مستقیم کے کہ انہیں سے ہر ایک دو ملکر تیس کے سے بڑے ہیں

فرض کرو کہ ا اور ب اور س دیے ہوئے ایسے تین خط مستقیم ہیں کہ انہیں سے ہر ایک دو ملکر تیس کے سے بڑے ہیں یعنی ا اور ب ملکر بڑے ہیں س سے اور ا اور س ملکر ب سے اور ب اور س ملکر ا سے



ایسا مثلث بنانا ہی کہ اُسکے ضلع

الگ الگ برابر ہوں ا اور ب اور س کے

ایسا خط مستقیم دی کیجئے جو کہ وہ نقطہ ج پر

محدود ہو لیکن ی کی طرف غیر محدود ہو

د ف برابر ا کے اور ف ج برابر ب کے اور ج لا برابر س کے بناؤ شکل ۳

اصول موضوع

ف مرکز سے ف د دوری بردائرہ د ک ل کھینچو

اصول مضبوطی

اور ج مرکز سے ج لا دوری بردائرہ لا ک ل کھینچو

نقطہ ک سے جہاں دونوں دائرے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ک ف

اصول منقولہ

اور ک ج نقطوں ف اور ج تک کھینچو

تو مثلث ک ف ج کے ضلع خط مستقیم ا اور ب اور س کے الگ الگ برابر ہوں گے

جو کہ ف مرکز دائرہ د ک ل کا ہی

۱۵

اسی لئے ف ک برابر ہی ف د کے

لیکن ف د برابر ا کے بنا یا گیا ہی

اسی لئے ف ک برابر ہی ا کے

علوم متناہدا

پھر جو کہ ج مرکز دائرہ لا ک ل کا ہی

اسلئے ج ک برابر ہی ج کے  
لیکن ج کو برابر میں کے بنایا گیا ہے  
اسلئے ج ک برابر ہی میں کے  
اور ف ج برابر کے بنایا گیا ہے  
اسلئے تین خط مستقیم ک ف اور ف ج اور ج ک الگ الگ برابر ہیں  
اور ب اور میں کے

اور اسلئے مثلث ک ف ج کے تین ضلع ک ف اور ف ج اور ج ک  
الگ الگ برابر ہیں دیے ہوئے تین خط مستقیم اور ب اور میں کے اور  
ایسی ہی مثلث کے بنانے کی ضرورت تھی

دیے ہوئے تین خط مستقیم میں سے ہر ایک دو کا تیسرے سے بڑے ہونا اسلئے ضروری ہے کہ وہ  
بغیر اس شرط کے (جیسا کہ اس مقالہ کی مبیون شکل سے ظاہر ہے) مثلث نہیں بن سکتا ہے

بعض لوگ اقلیدس پر یہ اعتراض کرتے ہیں کہ دائروں کا آپس میں کتنا ثابت نہیں کیا ہے لیکن  
اس شرط پر کہ خط مستقیم د ف اور ف ج اور ج ک میں سے ہر ایک دے ملکر تیسرے سے بڑے ہیں  
خیال کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں گے کیونکہ اس کتاب کا بڑھنے والا  
جو ذرا بھی عقل رکھتا ہو گا فوراً سمجھ جائیگا کہ دائرہ جو ف مرکز سے ف د دوری پر کھینچا گیا ہے خط مستقیم  
ک ف اور ہ نقطوں کے درمیان کاٹے گا کیونکہ ف ہ بڑا ہی ف د سے اور دائرہ جو ف مرکز سے  
ج ک دوری پر کھینچا گیا ہے خط مستقیم ج ک کو اور ج ف نقطوں کے درمیان کاٹے گا کیونکہ د ج  
بڑا ہی ج ک سے اور یہ دائرے ضرور آپس میں کاٹیں گے کیونکہ ف د اور ج ک کا ملکر  
ف ج سے بڑے ہیں

اس مقالہ کی پہلی شکل اس شکل کی ایک خاص صورت ہے کیونکہ اس شکل میں اگر اور ب اور میں  
آپس میں برابر ہوں تو یہ نہ شکل اور پہلی شکل ایک ہی ہو جائیگی

## مشق

۱ ایک دیے ہوئے مثلث کی برابر مثلث بناؤ  
 ۲ ایک دی ہوئی مستقیم الاضلاع کے برابر مستقیم الاضلاع بناؤ

## شکل ۲۳ عملی

دیے ہوئے خط مستقیم کے دیے ہوئے نقطہ پر ایک زاویہ مستقیم انخطین  
 برابر دیے ہوئے زاویہ مستقیم انخطین کے بناؤ  
 فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم  $Y$  اور اس میں  
 اویا نقطہ  $Y$  اور دس  $Y$  دیا ہوا زاویہ مستقیم انخطین ہے  
 خط مستقیم  $ab$  کے نقطہ  $a$  پر زاویہ مستقیم انخطین جو  
 زاویہ دس  $Y$  کے برابر ہو بنانا ہے  
 س داورس  $Y$  میں نقطے داورس مقرر کرو  
 دی ملاؤ

اب ہر ایک ایسا مثلث افتخ بناؤ کہ اسکے ضلعے برابر تین خط مستقیم  
 س داورس  $Y$  اور  $Y$  کے اسطرح سے ہوں کہ افتخ برابر ہو س د کے  
 اور افتخ برابر دی کے اور ج برابر  $Y$  کے  
 تو زاویہ افتخ برابر زاویہ دس  $Y$  کے ہوگا  
 چونکہ افتخ اور ج الگ الگ برابر ہیں دس اور  $Y$  کے  
 اور قاعدہ افتخ برابر ہی قاعدہ دی کے  
 اسلئے زاویہ افتخ برابر ہی زاویہ دس  $Y$  کے

شکل ۲۴

اسلئے دیے ہوئے خط مستقیم  $ab$  کے نقطہ  $a$  پر زاویہ افتخ برابر دیے  
 ہوئے زاویہ مستقیم انخطین دس  $Y$  کے بن گیا۔ اور اسی زاویہ کے بنانے کی ضرورت تھی

## مشق

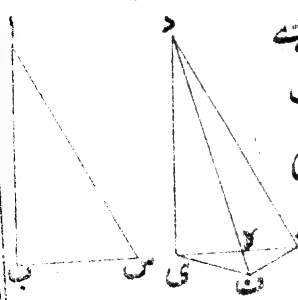
۱ اگر کسی مثلث کے دو زاویے ملکر برابر کسی زاویہ کے ہوں تو اس مثلث کے دو مثلث  
مساوی الساقین ہو سکتے ہیں

۲ اگر مثلث اب س کے زاویے ۱ اور ب ملکر برابر ہوں زاویہ س کے تو ضلع اب اس خط  
مستقیم سے جو زاویہ س کی راس سے اب کے بیچوں بیچ کے نقطہ تک کھینچا جائے دونا ہوگا

۳ ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدہ پر کا ایک زاویہ اور اسکے ضلعوں کا جوڑ معلوم ہی اس مثلث  
کی شکل بناؤ

## مشکل ۲۴ اثباتی

اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ  
برابر ہوں لیکن زاویہ جو ایک مثلث کے ان دو ضلعوں سے بنائی ہوا ہو دوسرے  
مثلث کے اس زاویہ سے جو ان ضلعوں کے برابر ضلعوں سے بنائی ہو تو قاعدہ اس  
مثلث کا جسکا زاویہ برابر ہوا ہو گا دوسرے مثلث کے قاعدہ سے



فرض کرو کہ اب س اور د ہی ق ایسے  
دو مثلث ہیں کہ ان کے ضلع اب اور اس الگ

الگ برابر ہیں ضلعوں د ہی اور د ف کے یعنی

اب برابر ہی د ہی کے اور اس برابر د ف کے

لیکن زاویہ ب اس برابر زاویہ د ہی د ف سے

تو قاعدہ ب س برابر ہوگا قاعدہ د ہی د ف سے

فرض کرو کہ د ہی اور د ف میں د ہی برابر نہیں ہے د ف سے

د ہی کے نقطہ د پر اور اسکے اسطرح د پر د ف ہی زاویہ د ج برابر

زاویہ ب اس کے بناؤ

شکل ۱۲

درج برابر د ف یا اس کے بناؤ

اور ی ج اور ج ف ملاؤ

اب چونکہ دی برابر ہی اب کے اور درج برابر اس کے یعنی مثلث  
دی ج کے دو ضلع دی اور ج مثلث اب س کے دو ضلعوں  
اب اور اس کے الگ الگ برابر ہیں

اور زاویہ ی ج برابر زاویہ ب اس کے بنا گیا ہے

شکل ۱۳

اسلئے قاعدہ ی ج برابر ہی قاعدہ ب س کے

اور چونکہ مثلث د ف ج میں درج برابر ہی د ف کے

اسلئے زاویہ د ف ج برابر ہی زاویہ د ج ف کے

لیکن زاویہ د ج ف بڑا ہی زاویہ ی ج ف سے

اسلئے زاویہ د ف ج بھی بڑا ہی زاویہ ی ج ف سے

اور اسلئے زاویہ ی ج ف اور بھی زیادہ بڑا ہی زاویہ ی ج ف سے

اور چونکہ مثلث ی ج ف میں تراویہ ی ج ف بڑا ہی زاویہ ی ج ف

شکل ۱۴

سے اور بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع بڑا ہوتا ہے

اسلئے ضلع ی ج بڑا ہی ضلع ی ج ف سے

لیکن ی ج برابر ب س کے ثابت ہو چکا ہے

اسلئے ب س بڑا ہی ی ج ف سے

اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلعوں

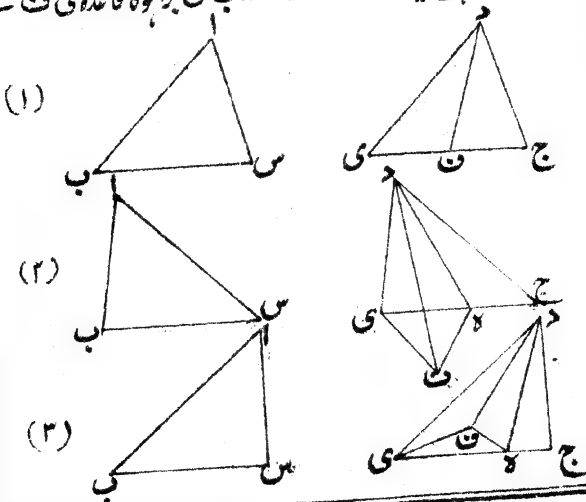
سے یعنی ثابت کرنا تھا۔

اس شکل میں اقلیدس نے اس بات کو بغیر ثابت کئے ہوئے مان لیا ہے کہ دو چھوٹا ی ج

سے یعنی نقطہ ف خطی ج کے نیچے ہی اسکو ہم اس طرح ثابت کر سکتے ہیں چونکہ زاویہ ی ج

دی کا زاویہ خارجی اسلئے زاویہ دہج بڑا ہی زاویہ داخلہ دی ج سے (شکل ۱۶)  
 چونکہ مثلث دی ج میں دج بڑا ہی دی سے یا اس کے برابر ہی اسلئے زاویہ دی ج بڑا ہی زاویہ  
 دج ی سے یا اس کے برابر ہی (شکل ۱۷) لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ زاویہ دہج بڑا ہی دج  
 سے بڑا ہی اسلئے زاویہ دہج زاویہ دج سے بڑا ہی اور اس واسطے دج بڑا ہی دہج سے (شکل ۱۸)  
 لیکن دج برابر ہی دت کے اسلئے دت بڑا ہی دہج سے یعنی نقطہ ف خطی ج کے نیچے ہے  
 اس شکل میں بہ شرط کہ ضلع دی ضلع دت سے بڑا نہیں ہے جس صاف زیادہ کی ہے اگر ہم  
 شرط نہ ہو تو شکل کی تین صورتیں ہو سکتی ہیں یعنی نقطہ ف خطی ج میں واقع ہو یا اس کے اوپر یا نیچے  
 ہو اگر ف خطی ج میں واقع ہو تو اس صورت میں صاف ظاہر ہے کہ ف چھوٹا ہو گا ی ج سے  
 اور اگر ف خطی ج سے اوپر واقع ہو تو دت ادوری ف ملکہ دج ادوری ج سے چھوٹے  
 ہوں گے (شکل ۱۹) اور چونکہ دت اور دج آپس میں برابر ہیں اسلئے ف چھوٹا ہو گا ی ج  
 یہ شکل اس طرح بھی ثابت ہو سکتی ہے

فرض کرو کہ اب س اور دی ف ایسے دو مثلث ہیں کہ اُنکے دو ضلع اب اور اس الگ  
 الگ برابر ہیں دو ضلع دی اور دت کے یعنی اب برابر ہی دی کے اور اس برابر دت کے  
 لیکن زاویہ ب اس بڑا ہی زاویہ ی دت سے تو قاعدہ ب س بڑا ہو گا قاعدہ ی دت سے





دی کے نقطہ دہراور اس کے اسطون جدھر دت ہی زاویہ ج برابر زاویہ ب اس کے بناؤ

شکل ۲۳

شکل ۲۴

دج برابر دت یا اس کے بناؤ

ج ی ملاؤ ج ی یا تو ف میں ہو کر گذریگا (پہلی صورت دیکھو) یا ف سے نیچے یا اوپر ہو کر گذریگا (دوسری اور تیسری صورت دیکھو)

دوسری اور تیسری صورت میں زاویہ ج کے خط مستقیم دہ سے دو برابر حصے کرو۔ شکل ۲۵ اور ۲۶ جہاں دہ خطی ج سے متناہی ف تک خط دت کھینچو

جو کہ اب برابر ہی دی کے اور اس برابر دج کے (تینوں صورتیں دیکھو) ایسے مثلث اب س کے دو ضلع اب اور اس الگ الگ برابر ہیں مثلث دی ج کے دو ضلع دی اور ج کے اور زاویہ ب اس برابر ہی زاویہ ج کے

شکل ۲۷

اسلئے قاعدہ ب س برابر ہی قاعدہ ج کے

پہلی صورت۔ چونکہ ج بڑا ہی ف ہے اور ج برابر ہی ہے بڑا ہو چکا ہے

اسلئے ب س بڑا ہی ف ہے

دوسری اور تیسری صورت۔ چونکہ مثلث دت دہ اور ج دہ میں ضلع دت برابر ہی ضلع ج کے اور دہ دونوں مثلثوں میں مشترک ہی اور زاویہ دت دہ برابر ہی زاویہ ج دہ کے

شکل ۲۸

اسلئے قاعدہ دت دہ برابر ہی قاعدہ ج دہ کے

اب دونوں برابر ہیں ی لا ملاؤ

علم و متعارفہ

اسلئے ف دہ اور دہ ی ملکر برابر ہوئے ی ج کے

شکل ۲۹

لیکن ف دہ اور دہ ی ملکر بڑے ہیں ی ف سے

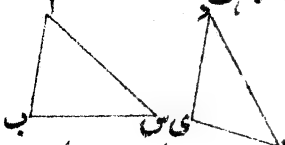
اسلئے ی ج برابر ہی ف دہ سے

لیکن ب س برابر ہی ج کے ثابت ہو چکا ہے

اسلئے ب س بھی بڑا ہی د ن سے

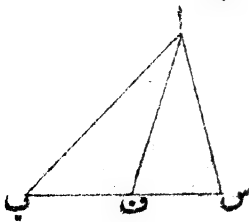
اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا  
چوتیسویں شکل کے ثابت کرنے کا تیسرا طریقہ یہ ہے

فرض کرو کہ مثلث اب اور د ی ن میں اب برابر ہی د ی کے اور اس پر اب  
د ن کے لیکن زاویہ ب اس بڑا ہی زاویہ ی د ن سے  
تو قاعدہ ب س برابر ہو گا قاعدہ ی د ن سے



مثلث د ی ن کو مثلث اب س پر اس طرح لکھو کہ ضلع د ی ضلع اب کو پورا پورا ڈھک لے  
تو چونکہ زاویہ ی د ن زاویہ ب اس سے چھوٹا ہی د ن ضلعوں ب اور اس کے درمیان

پڑے گا اور نقطہ ق یا تو ب س پر یا اُس سے اوپر یا نیچے پڑے گا  
پہلی صورت۔ اگر نقطہ ق قاعدہ ب س پر پڑتا ہے



تو ب س بڑا ہی ب ن سے

اسلئے ب س بڑا ہی د ن سے

دوسری صورت۔ اگر نقطہ ق قاعدہ ب س سے اوپر پڑتا ہے

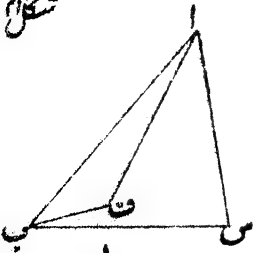
شکل ۱

تو اس اور ب س ملکر بڑے ہیں ان اور ب ن سے

اور ان اور اس آپس میں برابر ہیں

اسلئے ب س بڑا ہی ب ن سے

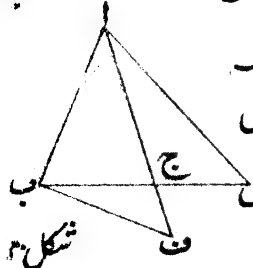
اسلئے ب س بڑا ہی د ن سے



تیسری صورت۔ اگر نقطہ ق قاعدہ ب س سے نیچے پڑتا ہے

فرض کرو کہ ان اور ب س ایک دوسرے کو قطع پر کاٹتے ہیں

تو چونکہ ا ج اور ج س ملکر بڑے ہیں اس سے اور



شکل ۲

ج اور ج ب ملکر ب ن سے

اسلئے اچ اور ج ن اور س ج اور ج ب ملکر ٹپے ہیں اس اور ب ن سے  
یعنی ان اور ب س ملکر ٹپے ہیں اس اور ب ن سے

لیکن ان برابر ہی اس کے

اسلئے ب س بڑا ہی ب ن سے

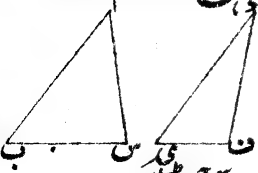
اسلئے ب س بڑا ہی ج ن سے

اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے انج۔ یہی ثابت کرنا تھا

### شکل ۵۴ اثباتی

اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ  
برابر ہوں لیکن قاعدہ ایک مثلث کا دوسرے مثلث کے قاعدہ سے بڑا ہو تو مثلث  
کا قاعدہ بڑا ہی اس کے ضلعوں سے بنا ہوا زاویہ دوسرے مثلث کے اس زاویہ سے  
جو ان ضلعوں کے برابر ضلعوں سے بنا ہی بڑا ہو گا

فرض کرو کہ اب س اور دی ن ایسے دو مثلث ہیں کہ ان کے دو ضلع اب  
اور اس الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں دی اور ن کے یعنی اب برابر ہی دی  
کے اور اس برابر دی ن کے لیکن قاعدہ ب س بڑا ہی قاعدہ ج ن سے



تو زاویہ ب اس بڑا ہو گا زاویہ ج ن سے

کیونکہ اگر زاویہ ب اس زاویہ ج ن سے

بڑا نہیں ہی تو زاویہ ب اس یا تو اس کے برابر ہی یا اس سے چھوٹا ہی

اگر زاویہ ب اس زاویہ ج ن کے برابر ہی

تو قاعدہ ب س کو بھی قاعدہ ج ن کے برابر ہونا چاہئے

لیکن قاعدہ ب س قاعدہ ج ن کے برابر نہیں ہی

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ج ن کے برابر نہیں ہی

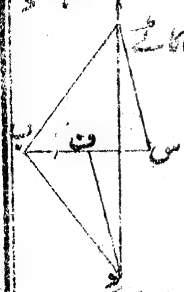
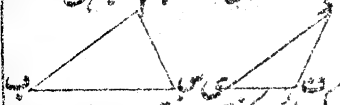
شکل ۵۴

فرض

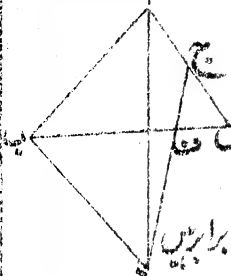
اگر زاویہ ب اس زاویہ ی د ف سے چھوٹا ہی  
 تو قاعدہ ب س کو بھی قاعدہ ی ف سے چھوٹا ہونا چاہیے  
 لیکن قاعدہ ب س قاعدہ ی ف سے چھوٹا نہیں ہی  
 اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ی د ف سے چھوٹا نہیں ہی  
 اور یہ ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ ب اس زاویہ ی د ف کے برابر نہیں ہی  
 اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ی د ف سے بڑا ہی  
 اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلع دو دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الخ یہی ثابت کرنا تھا  
 اس شکل کو اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ مثلث اب س اور د ی ف میں ضلع  
 اب برابر ہی ضلع د ی کے اور ضلع اس برابر ضلع د ف کے لیکن قاعدہ ب س بڑا ہی قاعدہ ی ف  
 سے تو زاویہ ب اس بڑا ہی زاویہ ی د ف سے  
 کیونکہ اگر مثلث د ی ف اور اب س اس طرح رکھیں جائیں کہ نقطہ ی نقطہ ب پر اور ی ف  
 کی سمت ب س کی سمت پر ہو اور زاویہ ی د ف اور ب اس آئینے آئینے ہوں تو چونکہ ی ف  
 چھوٹا ہی ب س سے نقطہ ف قاعدہ ب س پر ب اور ی کے درمیان ہوگا۔ د اظہار کی جا چوتھیں ہیں  
 پہلی صورت یہ کہ د قاعدہ ب س کو ف پر کاٹے  
 چونکہ زاویہ ب اد اور ب د برابر ہیں کیونکہ اب اس ب د برابر ہی زاویہ  
 ب اس زاویہ ب د سے بڑا ہی اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ب د ی ف سے بڑا ہی  
 دوسری صورت یہ کہ د قاعدہ ب س کو ف اور س کے درمیان کاٹے  
 چونکہ زاویہ ب د اور ب اس زاویہ ب د سے بڑا ہی (علوم متعارفہ)  
 اور زاویہ ب د اور ب اد برابر ہیں کیونکہ ب اد اور ب د برابر ہیں  
 اسلئے زاویہ ب اد زاویہ ب د ف سے بڑا ہی  
 اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ب د یعنی زاویہ ی د ف سے اور یہی زیادہ بڑا ہی

شکل ۲۳

فرض



تیسری صورت یہ کہ د ا قاعدہ ب س کو د اور ب کے درمیان کاٹے۔ د ف کو ج تک بڑھا  
چو کہ د ج بڑا ہی د ف سے اور د ف برابر اس کے ہی

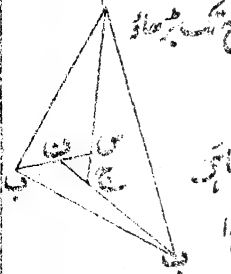


اسلئے د ج بڑا ہی اس سے یعنی ا ج سے اور بھی زیادہ بڑا ہی  
اسلئے زاویہ د ا ج زاویہ ا د ج سے بڑا ہی (شکل ۱۸)

اور زاویہ ب ا د اور ب د ا برابر ہیں کیونکہ ب د اور ب ا برابر ہیں

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ب د ف سے یعنی زاویہ ی د ف سے بڑا ہی

چوتھی صورت یہ کہ د ا قاعدہ ب س کو نہ کاٹے۔ اس کو ج تک بڑھاؤ  
چو کہ د ج چھوٹا ہی د ف سے اور د ف برابر اس کے ہی



اسلئے د ج چھوٹا ہی اس سے یعنی ا ج سے اور بھی زیادہ چھوٹا ہی

اسلئے زاویہ ج ا د زاویہ ج د ا سے چھوٹا ہی (شکل ۱۹)

اور زاویہ ب ا د اور ب د ا برابر ہیں کیونکہ ب د اور ب ا برابر ہیں

اسلئے زاویہ ب اس زاویہ ب د ف سے یعنی زاویہ ی د ف سے بڑا ہی (علوم متعارفہ)

یہ مکمل چوبیسویں شکل کا عکس ہے اور آٹھویں شکل کے ساتھ وہی علامت رکھتی ہے جو چوبیسویں شکل

چوتھی شکل کے ساتھ رکھتی ہے ان چار شکلوں کے آپس کا علاقتہ انکو اس طرح بیان کرتے ہیں

معلوم ہوگا

شکل ۱۸

شکل ۱۹

اگر ا ب = د ی

اور ا س = د ن

اور زاویہ ا = زاویہ د

اگر ا ب = د ی

اور ا س = د ن

اور ب س = ی ف

تو ب س = ی ف

تو زاویہ ا = زاویہ د

## شکل ۲۲ -

اگر اب = دی

اور اس = دت } تو بس &lt; ی ف

لیکن زاویہ &lt; زاویہ د

## شکل ۲۵ -

اگر اب = دی

اور اس = دت } تو زاویہ ا &lt; زاویہ د

لیکن بس &lt; ی ف

ان چار شکلوں میں سے دو دو کو ملا کر اس طرح بیان کرتے ہیں "اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں تو قاعدہ ایک مثلث کا دوسرے مثلث کے قاعدہ سے بڑا یا چھوٹا ہوگا (شکل ۲۲) یا اُسکے برابر ہوگا (شکل ۲۳) جیسا کہ پہلے مثلث کے قاعدہ کے سامنے کا زاویہ بڑا یا چھوٹا ہے دوسرے مثلث کے قاعدہ کے سامنے کے زاویہ سے یا اُسکے برابر ہوگا اور اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں تو ایک مثلث کے دو ضلعوں سے بنا ہوا زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلعوں سے بنے ہوئے زاویہ سے بڑا یا چھوٹا ہوگا (شکل ۲۴) یا اُسکے برابر ہوگا (شکل ۲۵) جیسا کہ پہلے مثلث کا قاعدہ بڑا یا چھوٹا ہے دوسرے مثلث کے قاعدہ سے یا اُسکے برابر ہے

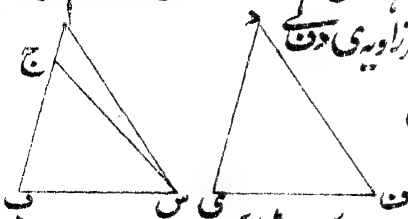
## شکل ۲۶ اثباتی

اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے مثلث کے ایک ضلع کے برابر ہو اور یہ برابر ضلع خواہ برابر زاویوں کے درمیان کے ہوں یا اُسکے سامنے کے ہوں تو ایک مثلث کے باقی ضلعے الگ الگ برابر ہوں گے دوسرے مثلث کے باقی ضلعوں کے اور تیسرا زاویہ بھی ایک کا برابر ہوگا دوسرے مثلث کے تیسرے زاویہ کے

فرض کرو کہ اب س اور دی ف ایسے دو مثلث ہیں کہ انکے زاویے اب س اور اس ب الگ الگ برابر ہیں زاویوں دی ف اور دی ف کے یعنی زاویہ اب برابر ہی زاویہ دی ف کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ دی ف کے اور ایک ایک ضلع بھی ان مثلثوں کا آپس میں برابر ہو

پہلے فرض کرو کہ ضلع ب س اور دی ف جو ان مثلثوں کے برابر زاویوں کے درمیان ہیں آپس میں برابر ہیں

تو باقی ضلع ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہوں گے دو مثلث سس کے باقی ضلعوں کے یعنی ضلع اب برابر ہو گا ضلع دی ف کے اور ضلع اس ب برابر ہو گا تو میرا زاویہ اب بھی برابر ہو گا تیس کے زاویہ دی ف کے کیونکہ اگر ضلع اب ضلع دی



کے برابر نہیں ہوں گے

تو ایک ان دونوں میں سے ضرور دوسرے بڑا ہو گا

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ اب بڑا ہی دی ف سے

ب ج برابر ہی د کے بناؤ

شکل ۳

اصول منقولہ

اور س ج ملاؤ

چونکہ دو مثلث ج ب س اور دی ف اب س برابر ہی دی ف کے اور

ب س برابر ہی دی ف کے یعنی دو ضلع ج ب اور ب س الگ الگ برابر

ہیں دی ف اور دی ف کے

اور زاویہ ج ب س برابر ہی زاویہ دی ف کے

اسلئے قاعدہ ج س برابر ہی قاعدہ دی ف کے اور مثلث ج ب س برابر ہی

مثلث دی ف کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہیں دوسرے

ثلث کے باقی زاویوں کے یعنی وہ زاویے آپس میں برابر ہیں جنکے سامنے برابر ضلع ہیں

شکل ۴

فرض

علوم متعارفہ

علوم متعارفہ

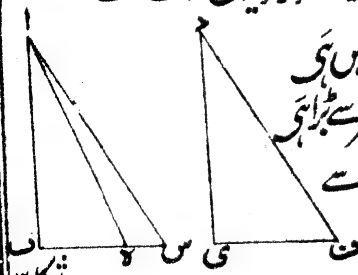
اسلئے زاویہ ج س ب برابر ہی زاویہ د ف ی کے  
لیکن زاویہ اس ب برابر ہی زاویہ د ف ی کے  
اسلئے زاویہ ج س ب برابر ہی زاویہ اس ب کے  
یعنی چھوٹا زاویہ برابر بڑے زاویہ کے ہی اور یہ ناممکن ہی  
اسلئے اب برابر نہیں ہو دیں گے  
یعنی اب برابر ہی دیں گے

اب ثلث اس ب اور د ف ی میں چونکہ اب برابر ہی دیں گے اور ب س  
برابری د ف کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ د ف کے  
اسلئے قاعدہ اس برابر ہی قاعدہ د ف کے اور تیسرا زاویہ ب اس برابر تیسرے  
زاویہ د ف کے

شکل ۵

دوسری صورت یہ فرض کرو کہ ضلع جو برابر زاویوں کے سامنے ہیں آپس میں  
برابر ہیں یعنی اب برابر ہی دیں گے

تو اس صورت میں بھی باقی ضلع ایک ثلث کے الگ الگ برابر ہوں گے  
ثلث کے باقی ضلعوں کے یعنی ب س برابر ہو گا د ف کے اور اس برابر د ف  
کے اور تیسرا زاویہ ب اس برابر ہو گا تیسرے زاویہ د ف کے



شکل ۶

کیونکہ اگر ب س برابر ہی د ف کے نہیں ہی  
تو ان دونوں میں سے ایک ضرور دوسرے سے بڑا ہی  
فرض کرو کہ ب س بڑا ہی د ف سے  
ب کا برابر ہی د ف کے بناؤ



اور الا ملاؤ

چونکہ مثلث اب لا اور دی ف میں اب برابر ہی دی کے اور ب برابر ہی  
کے اور زاویہ اب لا برابر زاویہ دی ف کے

اسلئے قاعدہ الا برابر ہی قاعدہ دی ف کے اور مثلث اب لا برابر مثلث  
دی ف کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہیں دوسرے  
مثلث کے باقی زاویوں کے یعنی وہ زاویے آپس میں برابر ہیں جنکے سامنے برابر  
ضلع ہیں

اسلئے زاویہ الا ب برابر ہی زاویہ دی ف کے  
لیکن زاویہ دی ف ی برابر ہی زاویہ اس ب کے  
اسلئے زاویہ الا ب برابر ہی زاویہ اس ب کے  
یعنی مثلث الا ب کا زاویہ خارجہ الا ب برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ  
اس ب کے اور یہ ناممکن ہے

اسلئے ب س برابر نہیں ہی ف کے  
یعنی ب س برابر ہی ف کے

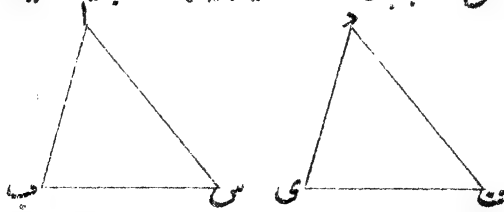
اب مثلث اب س اور دی ف میں چونکہ اب برابر ہی دی کے اور  
ب س برابر ہی ف کے اور زاویہ اب س برابر زاویہ دی ف کے  
اسلئے قاعدہ اس برابر ہی قاعدہ دی ف کے اور یہ زاویہ ب اس  
برابر ہی زاویہ دی ف کے

اس واسطے اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں  
کے الخ۔ بھی ثابت کرنا تھا

اس شکل کو عمل تطبیق سے اسطرح ثابت کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ اب س اور د ہی ت ایسے دو مثلث ہیں کہ انکے زاویے اب س اور اس ب الگ الگ برابر ہیں زاویوں د ی ت اور د ی کے یعنی زاویہ اب س برابر ہی زاویہ د ی ت کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ د ی کے اور ایک ضلع ایک مثلث کا برابر ہی دوسرے مثلث کے ایک ضلع کے

پہلی صورت فرض کرو کہ ضلع ب س اور ی ت جو برابر زاویوں کے درمیان ہیں آپس میں برابر ہیں تو باقی ضلع ایک مثلث کے برابر ہوں گے دوسرے مثلث کے باقی ضلعوں کے یعنی ضلع اب برابر ہوگا ضلع د ی کے اور ضلع اس برابر ضلع د ی کے اور نیز زاویہ ب اس برابر ہی زاویہ ی د ی کے



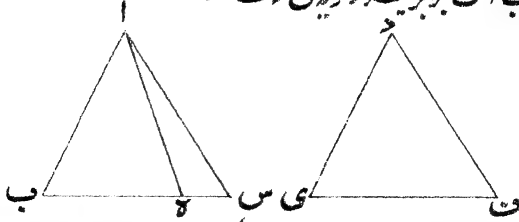
کیونکہ اگر مثلث د ی ت مثلث اب س برابر سطح رکھا جائے کہ نقطہ ی نقطہ ب پر ہو اور ضلع ی ت ضلع ب س پر

تو چونکہ ی ت برابر ہی ب س کے نقطہ ت نقطہ س پر پڑیگا اور چونکہ زاویہ ی ت برابر ہی زاویہ ب س کے اسلئے ضلع ی د ضلع ب ا پر پڑیگا اور اسلئے نقطہ د یا تو ب ا پر پڑیگا یا اسکی سیدھ میں پڑیگا پھر چونکہ زاویہ ی ت برابر ہی زاویہ ب س کے اسلئے ضلع ت د ضلع س ا پر پڑیگا اور اسلئے نقطہ د یا تو ب ا پر پڑیگا یا اسکی سیدھ میں پڑیگا

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ نقطہ د یا تو ب ا پر پڑیگا یا اسکی سیدھ میں پڑیگا اسلئے نقطہ د نقطہ ا پر چوب اور س ا دونوں میں مشترک ہی پڑیگا اسلئے ی د اور ب ا ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لیں گے اور اسلئے آپس میں برابر ہوں گے اور ت د اور س ا ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لیں گے اور اسلئے آپس میں برابر ہوں گے

اور زاویہ ی د ف اور ب اس ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لینگے اور اسلئے آپس میں برابر ہو گئے دوسری صورت یہ فرض کی کہ ضلع جو مثلثوں کے برابر زاویوں کے سامنے ہیں آپس میں برابر ہیں یعنی ضلع اب اور د ی آپس میں برابر ہیں

تو اس صورت میں بھی ایک مثلث کے باقی ضلع الگ الگ برابر ہو گئے دوسرے مثلث کے باقی ضلعوں کے یعنی ضلع ب س برابر ہو گا ضلع ی ف کے اور ضلع اس برابر ضلع د ف کے اور نیز زاویہ ب اس برابر نیز زاویہ ی د ف کے



اگر مثلث د ی ف مثلث اب س پر اس طرح رکھا جائے کہ نقطہ د نقطہ ب پر اور ضلع د ی ضلع اب پر ہو

تو چونکہ د ی برابر اب کے ہی اسلئے نقطہ ی نقطہ ب پر پڑیگا اور چونکہ زاویہ د ی ف برابر ہی زاویہ اب س کے اسلئے ضلع ی ف ضلع ب س پر پڑے گا اور نقطہ ف بھی نقطہ س پر پڑیگا

کیونکہ اگر ضلع ی ف ضلع ب س پر ہو لیکن نقطہ ف نقطہ س پر نہ پڑے تو فرض کرو کہ نقطہ ف نقطہ لا کی جگہ پر ب اور س کے درمیان پڑتا ہی

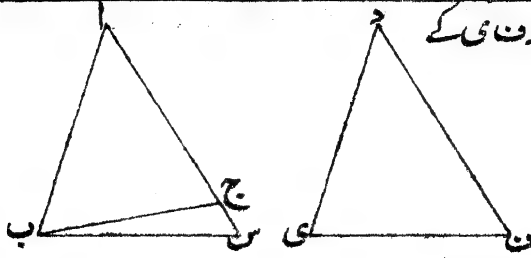
الاطاؤ

چونکہ زاویہ الا ب برابر ہی زاویہ د ف ی اور زاویہ د ف ی برابر ہی زاویہ اس ب کے اسلئے زاویہ الا ب برابر ہی زاویہ اس ب کے

یعنی زاویہ خارجہ برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ کے اور یہ ناممکن ہی شکل ۱۶  
اسلئے نقطہ ف نقطہ لا یعنی ب اور س کے درمیان نہیں پڑتا ہی اسی طرح بہنہ بھی

ثابت ہو سکتا ہے کہ نقطہ ضلع ب س کے بڑے ہوئے حصہ پر بھی نہیں پر سکتا ہے  
اسلئے ف ٹھیک س پر پڑے گا اور اسلئے ب س برابر ہی ف کے  
اسلئے قاعدہ اس برابر ہی قاعدہ د ف کے اور زاویہ ب اس برابر ہی زاویہ ی د ف کے  
اسلئے اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے ملے - یہی ثابت کرتا تھا  
جو تھی شکل کی شرح میں بیان ہوا ہے کہ ہر مثلث میں جب مقداریں ہوتی ہیں اور اگر ان جیسے  
مقداروں میں سے کوئی تین دی ہوئی ہوں تو سوا سے پہلی اور چوتھی صورت کے اور صورتوں  
میں باقی تین مقداریں دریافت ہو سکتی ہیں اور مثلث معلوم ہو سکتا ہے چوتھی صورت میں اگر ایک خاص  
شرط لگا دی جائے تو دو مثلث جنہیں دو ضلعے ایک مثلث کے برابر ہوں دوسرے مثلث کے  
دو ضلعوں کے اور ان ضلعوں میں سے دو برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے برابر ہوں  
ایسی برابر ہو گئے اس قید کے ساتھ اس صورت کو اس طرح بیان کرتے ہیں "اگر ایک مثلث کے  
دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں اور ان ضلعوں میں سے دو برابر ہوں  
کے سامنے کے زاویے ایسی برابر ہوں اور یہ شرط بھی ہو کہ دوسرے دو برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے  
دونوں حادثہ ہوں یا دونوں منفرد ہوں یا انہیں سے ایک قائمہ ہو تو تیسرا ضلع ایک مثلث کا برابر  
ہو گا دوسرے مثلث کے تیسرے ضلع کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ الگ برابر ہوں  
دوسرے مثلث کے باقی زاویوں کے " اقلیدس نے اس صورت کو چھوڑ دیا ہے وہ اس طرح ثابت ہو سکتی ہے  
فرض کرو کہ اب س اور دی ف مثلثوں میں اب برابر ہی دی کے اور ب س برابر  
ی ف کے اور زاویے ب اس اور ی د ف جو دو برابر ضلعوں ب س اور ی د ف کے  
سامنے ہیں ایسی برابر ہیں اور زاویے اس ب اور د ی جو دوسرے دو برابر ضلعوں  
اب اور دی کے سامنے ہیں یا تو دونوں حادثہ ہیں یا دونوں منفرد ہیں یا ان میں سے  
ایک قائمہ ہے  
تو اس برابر ہو گا د ف کے اور زاویہ اب س برابر زاویہ دی ف کے اور زاویہ اس ب

برابر زاویہ دئی کے



اگر اس برابر دئی کے نہیں ہو تو اج برابر دئی کے بناؤ اور ب ج ملاؤ  
چونکہ مثلث اب ج اور دئی میں برابر ہیں د کے اور اج برابر دئی کے

اور زاویہ ب اج برابر دئی کے

اسلئے ب ج برابر دئی کے اور زاویہ ب اج برابر زاویہ دئی کے شکل ۱۱

لیکن ب س برابر دئی کے

اسلئے ب ج برابر دئی کے

اسلئے زاویہ ب س ج برابر دئی کے ب ج س کے

پہلے فرض کرو کہ زاویے اس ب اور دئی دونوں حادث ہیں تو زاویہ ب س ج بھی حادث ہے

اور اسلئے ب ج س منفرجہ ہے شکل ۱۲

اسلئے زاویہ ب س ج بھی منفرجہ ہے اور یہ ہمارے فرض کے خلاف ہے

دوسری صورت فرض کرو کہ زاویے اس ب اور دئی دونوں منفرجہ ہیں

تو زاویہ ب ج س برابر زاویہ دئی کے ثابت ہو چکا ہے منفرجہ ہے

اور اسلئے ب ج س حادث ہے شکل ۱۳

اسلئے زاویہ ب س ج بھی حادث ہے اور یہ ہمارے فرض کے خلاف ہے

تیسری صورت فرض کرو کہ زاویوں اس ب اور دئی میں سے کوئی ایک زاویہ قائمہ ہے

اگر زاویہ اس ب قائمہ ہے تو زاویہ ب ج س بھی قائمہ ہے

اسلئے زاویے ب س ج اور ب ج س ملکر برابر دو قائموں کے ہیں اور یہ ناممکن ہے شکل ۱۴

اگر زاویہ دہی قائمہ ہو تو زاویہ اج ب بھی قائمہ ہو اور اسلئے زاویہ ج س قائمہ ہو شکل ۳  
 اسلئے زاویہ ب س ج بھی قائمہ ہو  
 اسلئے زاویے ب س ج اور ب ج س ملکر برابر دو قائموں کے ہیں اور یہ ناممکن ہو شکل ۴  
 اسلئے اس نابرابر دہی کے نہیں ہو یعنی اس برابر دہی کے ہی  
 اسلئے مثلث اب س برابر ہی مثلث د س کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے الگ  
 الگ برابر ہیں دو کٹر مثلث کے باقی زاویوں کے یعنی زاویہ اب س برابر ہی زاویہ د س کے  
 کے اور زاویہ اس ب برابر زاویہ د س کے  
 اسلئے اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے برابر ہوں یہی ثابت ہوتا تھا

### مشق

- ۱ مثلث کے کسی دو ضلعوں سے بنے ہوئے زاویہ کے ایک خط دو برابر حصے کرتا ہو اگر اس خط کے کسی نقطہ سے ان ضلعوں پر عمود گراویں تو وہ آپس میں برابر ہوں گے
- ۲ تین خط مستقیم دیے ہوئے ہیں ان میں سے کسی ایک خط مستقیم میں ایسا نقطہ دریافت کرو کہ عمود جو اس نقطہ سے باقی دو خطوں پر گرائے جائیں آپس میں برابر ہوں اور یہ بھی بتاؤ کہ کس حالت میں یہ ممکن ناممکن ہو
- ۳ تین نقطے دیے ہوئے ہیں ایک ایسا خط کھینچو کہ وہ ان نقطوں میں سے کسی ایک نقطہ میں ہو کر گزرے اور عمود جو اسے باقی دو نقطوں سے گرائے جائیں آپس میں برابر ہوں اور یہ بھی بتاؤ کہ کس حالت میں یہ ممکن ناممکن ہو
- ۴ مثلث اب س کے زاویہ ا کے ایک خط مستقیم دو برابر حصے کرتا ہو ب سے عمود د اس خط پر گرایا گیا ہو اور ب د بھکر اس سے یا اس کے بڑھے ہوئے حصہ سے نقطہ ی پر ملتا ہو ثابت کرو کہ ب د برابر ہی د س کے
- ۵ اب اور اس کوئی دو خط مستقیم نقطہ پر ملتے ہیں کسی نقطہ د سے ایک ایسا خط مستقیم

دونوں خطوں سے نقطہ سی اور ف پر ملتا ہوا کھینچ کر ای برابر ہوا ف کے

۶ دو مثلث قائم الزاویہ ایسے ہیں کہ ان کے وتر آپس میں برابر ہیں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے

مثلث کے ایک ضلع کے برابر ہی تو ثابت کرو کہ دونوں مثلث سب طرح آپس میں برابر ہیں

ح د زاویے متبادلہ ان زاویوں کو کہتے ہیں جو دو خط مستقیم کسی تیسرے خط سے اس کے دونوں نقطوں پر بلکہ اس کے آسنے سائنے کی طرفوں میں پیدا کرتے

ہیں جیسا کہ اس شکل میں زاویے  
اب سی اور ب سی د زاویے  
متبادلہ ہیں

### شکل ۷۴ اثباتی

اگر ایک خط مستقیم کسی اور دو خط مستقیم پر گر کر زاویے متبادلہ ایک دوسرے کے برابر بناوے تو وہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوں گے

فرض کرو کہ خط مستقیم سی و دو خط مستقیم اب اور س د پر گر کر زاویے متبادلہ ای و اوری و ف د ایک دوسرے کے برابر بنائے

تو اب متوازی ہو گا س د کا

اگر اب متوازی س د کا ہو ج

تو اب اور س د ہر حکم کسی طرف

خواہ اب اور د کی طرف یا ا اور س کی طرف کہیں بلجائیں گے

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ اب اور س د ہر حکم اب اور د کی طرف نقطہ

ج پر ملتے ہیں

تو ج سی و ف ایک مثلث ہی

چونکہ مثلث ج سی و ف کا ایک ضلع ج سی نقطہ ایک ہر ہا ہی

اسلئے زاویہ خارجہ ای ف اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ی ف ج کے برابر ہو سکتا ہے  
لیکن زاویہ ای ف برابر ہی زاویہ ی ف ج کے فرض  
اسلئے زاویہ ای ف برابر ہی زاویہ ی ف ج سے اور اس کے برابر بھی ہو  
اور یہ ناممکن ہو

اسلئے اب اور س د بڑھ کر ب اور د کی طرف نہیں مل سکتے ہیں  
اور اسی طرح یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اب اور س د بڑھ کر ا اور س کی طرف  
بھی نہیں مل سکتے ہیں

لیکن وہ خط مستقیم جو ایک سطح میں ہوں اور دونوں طرف کتنی ہی دور تک  
بڑھنے سے کہیں نہ ملیں ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں حد ۳  
اسلئے اب متوازی ہی س د کا

اسلئے اگر ایک خط مستقیم کسی اور دو خط مستقیم پر الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
اس شکل اور آگے کی شکل کے دعویٰ میں یہ شرط ہونا ضروری کہ دونوں خط مستقیم جن پر یہ خط  
گرتا ہے ایک ہی سطح میں ہوں اگر یہ شرط نہ ہو تو ممکن ہو سکتا ہے کہ ایک خط مستقیم دو خط مستقیم پر گزر کر  
زاویے متبادلہ برابر بناوے لیکن وہ دونوں خط مستقیم ایک دوسرے کے متوازی نہ ہوں

### مشق

ا اگر خط مستقیم ی ج کا ف کسی دو خط مستقیم اب اور س د کو جو ایک سطح میں ہیں نقطوں  
ج اور د پر کاٹے اور زاویے ج ای اور د کا برابر بنائے تو اب اور س د ایک دوسرے  
کے متوازی ہوں گے

م اگر خط مستقیم ی ج کا ف دو خط مستقیم اب اور س د کو جو ایک سطح میں ہیں نقطوں  
ج اور د پر کاٹے اور زاویے ج ای ج ب اور د کا ف ملکر برابر بنائے تو اب اور س د  
ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے



## مسئلہ ۲۸ اثباتی

اگر ایک خط مستقیم کسی اور دو خط مستقیم پر گر کر انہی ایک طرف میں زاویے خارجہ اور اسکے سامنے کا زاویہ داخلہ آپس میں برابر بناوے یا انہی ایک طرف کے دو زاویے داخلہ برابر دو قائموں کے بناوے تو وہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوں فرض کرو کہ خط مستقیم ی ف دو خط مستقیم اب اور س د پر گر کر زاویہ خارجہ ی ج ب اسکے سامنے کے زاویہ داخلہ ج د کے برابر انہی ایک طرف میں بنائے یا انہی ایک طرف کے دو زاویے داخلہ ج د اور ج د برابر دو قائموں کے بنائے

تو اب متوازی ہو گا س د کا  
چونکہ زاویہ ی ج ب برابر ہی زاویہ ج د کے  
اور زاویہ ی ج ب برابر ہی زاویہ ج د کے  
اس لئے زاویہ ج د برابر ہی زاویہ ج د کے  
اور یہ زاویے متساوی ہیں  
اس لئے اب متوازی ہی س د کا

پھر چونکہ زاویے ج د اور ج د ملکر برابر دو قائموں کے ہیں  
اور زاویے ج د اور ج د بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں  
اس لئے زاویے ج د اور ج د ملکر برابر ہیں زاویوں ج د اور ج د کے

ان برابروں میں سے زاویہ ی ج د جو دونوں میں مشترک ہی نکال ڈالو  
اس لئے باقی زاویہ ج د برابر ہی باقی زاویہ ج د کے  
اور یہ زاویے متساوی ہیں

س

ف

ن

شکل ۱۵

علوم متعارفہ

شکل ۱۶

فرض

شکل ۱۷

فرض

شکل ۱۸

فرض

شکل ۱۹

فرض

شکل ۲۰

فرض

شکل ۲۱

فرض

شکل ۲۲

فرض

شکل ۲۳

فرض

شکل ۲۴

شکل ۲۷

اسلئے اب متوازی ہی میں د کا  
اسلئے اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم پر گر کر الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
اس شکل میں دو شکلیں شامل ہیں

### شکل ۲۹ ابتدائی

اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرے تو زاویے متبادلہ آپس میں برابر  
اور اسکی ایک طرف میں زاویہ خارجہ اور اس کے سامنے کا زاویہ داخلہ آپس میں برابر اور اسکی  
ایک طرف میں دو زاویے داخلہ ملکر برابر دو قائموں کے پیدا ہوں گے  
قرض کرو کہ خط مستقیم فی و دو متوازی خط مستقیم اب اور ج پر گرتا ہے  
تو زاویے متبادلہ ا ج و ا و ج و ج و ج  
آپس میں برابر ہوں گے اور فی و کے ایک طرف  
میں زاویہ خارجہ ج و ج اور اس کے سامنے  
کا زاویہ داخلہ ج و ج آپس میں برابر ہوں گے اور دو زاویے داخلہ ج و ج اور  
ج و ج ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے  
کیونکہ اگر زاویہ ا ج و زاویہ ج و ج کے برابر نہ ہوں تو ان میں سے ایک ضرور  
دوسرے سے بڑا ہوگا

اگر ممکن ہو تو قرض کرو کہ زاویہ ا ج و بڑا ہی

چونکہ زاویہ ا ج و بڑا ہی زاویہ ج و ج سے

اور ان دونوں نابرابریوں میں زاویہ ج و ج لا دیا

اسلئے زاویے ا ج و اور ج و ج و ج و ج میں زاویوں ج و ج اور

ج و ج سے لیکن زاویہ ا ج و اور ج و ج و ج و ج برابر دو قائموں کے ہیں شکل ۳۰

اسلئے زاویے ج و ج و ج و ج برابر دو قائموں سے کم ہیں

لیکن اگر دو خط مستقیم پر ایک خط کے گرنے سے اسکی ایک طرف میں دو زاویے داخلہ ایسے نہیں کہ وہ دونوں ملکر دو قائموں سے کم ہوں تو وہ دونوں خط مستقیم لگاتار بڑھائے جانے سے کہیں نہ کہیں اس طرف میں جدھر وہ زاویے ہیں جو ملکر دو قائموں سے کم ہیں ملجائیں گے

علوم متعارفہ ۱۲

اسلئے اب اور اس د لگاتار بڑھائے جانے سے ملجائیں گے

لیکن یہ کبھی نہیں مل سکتے ہیں کیونکہ یہ متوازی ہیں

فرض

اسلئے زاویہ اج  $\angle$  زاویہ ج  $\angle$  د کے برابر نہیں ہیں یعنی اسکے برابری

شکل ۱۵

چونکہ زاویہ اج  $\angle$  برابر ہی زاویہ ی ج ب کے

علوم متعارفہ

اسلئے زاویہ ی ج ب برابر ہی زاویہ ج  $\angle$  د کے

ان دونوں برابروں میں زاویہ ب ج  $\angle$  ملاؤ

اسلئے زاویے ی ج ب اور ب ج  $\angle$  ملکر برابر ہیں زاویوں ب ج  $\angle$

اور ج  $\angle$  د کے

علوم متعارفہ

لیکن زاویے ی ج ب اور ب ج  $\angle$  ملکر برابر دو قائموں کے ہیں

علوم متعارفہ

اسلئے زاویے ب ج  $\angle$  اور ج  $\angle$  د بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں

علوم متعارفہ

اسلئے اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرنے تو زاویے الخ - یہی ثابت کیا

اس شکل میں تین مختلف شکلیں شامل ہیں انیس سے پہلی شکل ستائیسویں شکل کا عکس ہے اور دوسری

اوپر دوسری شکلیں اٹھائیسویں شکل کے پہلے اور دوسرے حصہ کا عکس ہیں

اس شکل کو پتھر صاحب نے بغیر بارہویوں علوم متعارفہ کی مدد کے اس طرح ثابت کیا ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم ی ج د دو متوازی خط مستقیم اب اور س د پر گزرتا ہے

تو زاویے متبادلہ اج  $\angle$  اور ج  $\angle$  د آپس میں برابر ہوں گے

اور زاویہ خارجی ج ی ب برابر ہوں گے اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ج  $\angle$  د کے جو ی ج

کے اسی طے میں ہی اوری ق کے ایک ٹیپ ل  
 دو زاویے داخلہ ب ج کا اور ج کا د مکر  
 برابر دو قائموں کے ہوں گے

اگر زاویہ ا ج کا برابر ہو زاویہ ج کا د کے تو ان میں سے ایک بڑا ہوگا دوسرے سے  
 اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ زاویہ ا ج کا بڑا ہی زاویہ ج کا د سے  
 ج کے نقطہ ج پر اور اس کے اسطوت میں جدھر زاویہ ا ج کا ہی زاویہ ج کا د کے برابر ہو  
 ج کا د کے بناؤ ل ج کو ل تک بڑھاؤ

جو کہ زاویے متبادلہ ل ج کا د اور ج کا د آپس میں برابر ہیں

اس لئے ل متوازی ہی میں د کا

لیکن اب بھی متوازی ہی میں د کا

شکل ۴

فرض

اس لئے اب اور ل جو ایک ہی نقطہ ج میں ہو کر گزرتے ہیں دونوں متوازی ہیں میں د  
 کے اوپر یہ ناممکن ہی (تاہم یہی علوم متعارفہ کی شرح کو دیکھو)

اس لئے زاویے متبادلہ ل ج کا د اور ج کا د برابر ہیں یعنی آپس میں برابر ہیں  
 جو کہ زاویہ ج کا د برابر ہی زاویہ ا ج کا د کے

شکل ۵

اور زاویہ ا ج کا برابر زاویہ ج کا د کے ثابت ہو چکا ہے

اس لئے زاویہ خارجی ج کا د برابر ہی زاویہ داخلہ ج کا د کے

جو کہ زاویہ ج کا د برابر ہی زاویہ ج کا د کے اور ان دونوں برابر میں سے ہر ایک

میں زاویہ ب ج کا ملایا

اس لئے زاویہ ج کا د اور ب ج کا د برابر ہو گئے زاویوں ب ج کا د اور ج کا د کے متعلق

شکل ۱۲

لیکن زاویہ ج کا د اور ب ج کا د برابر دو قائموں کے ہیں

اس لئے زاویے داخلہ ب ج کا د اور ج کا د بھی برابر دو قائموں کے ہیں

علوم متعارفہ

اسلئے اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گزے تو زاویے متبادل الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

### مشق

۱ جو خط مستقیم مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کا متوازی ہوگا وہ ساقوں کے ساتھ برابر ہوگا  
بنائیگا

۲ اگر دو خط مستقیم اور ب الگ الگ متوازی ہوں دو خط مستقیم میں اور ک یعنی متوازی ہوں کا اور ب متوازی ہوگا تو ثابت کرو کہ اکا جھکاؤ وجود کے ساتھ ہی برابر ہوگا اس جھکاؤ کے جو ب کا س کے ساتھ ہی

۳ اگر دو زاویے آپس میں برابر ہوں اور ان کی ایک ایک ساق آپس میں متوازی ہو تو ایک زاویہ کی دوسری ساق دوسرے زاویہ کی دوسری ساق کے متوازی ہوگی

۴ ایک خط مستقیم کے سرے دو متوازی خط مستقیم ہیں اس خط کے بیچوں بیچ کے نقطہ کے ایک ایسا خط مستقیم کھینچی گیا ہے کہ اسکے سرے ان دو متوازی خطوں پر پڑتے ہیں تو ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کے بھی اس نقطہ سے دو برابر حصے ہوتے ہیں

۵ اگر کسی نقطہ سے جو دو متوازی خط مستقیم سے برابر دوری پر ہے، خط مستقیم ان متوازی خطوں کو کاٹتے ہوئے کھینچے جائیں تو متوازی خطوں کے حصے جو ان خطوں کے درمیان ہوں گے آپس میں برابر ہوں گے

۶ اگر خط مستقیم جو ایک مثلث کے زاویہ قاعدہ اس کے دو برابر حصے کرتا ہے اس مثلث کے قاعدہ کا متوازی بھی ہو تو ثابت کرو کہ وہ مثلث متساوی الساقین ہے

۷ مثلث اب میں کے زاویہ ب اس کے خط اد دو برابر حصے کرتا ہے اور ب س سے نقشہ دہر لٹا ہے دی اور د متوازی ہیں اس اور اب کے اور اب اس سے نقطہ

ی اور ف پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ دی اور د آپس میں برابر ہیں

۸ مثلث اب میں کا ضلع ب س نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے اور سی زاویہ اس بن کے

اور جس زاویہ اس د کے دو برابر حصے کرتا ہی سی ضلع اب سے ہی پرلتا ہی ج  
متوازی ہی بی س کا اور اس کو نقطہ ف پر کاٹتا ہی ثابت کرو کہ ی ف اور ف ج  
آپس میں برابر ہیں

### شکل ۳۰ اثباتی

جو خط مستقیم کسی ایک ہی خط مستقیم کے متوازی ہوتے ہیں وہ آپس میں  
بھی متوازی ہوتے ہیں

فرض کرو کہ اب اور س دیں سے ہر ایک متوازی ہی ی ف کا

تو اب متوازی ہوگا س د کا  
ایسا خط ج لا کہ فرض کرو کہ وہ اب اور ف  
ی ف اور س د کو کاٹے

چونکہ ج لا دو متوازی خط مستقیم اب اور ی ف کو نقطوں ج اور  
پر کاٹتا ہی

اس لئے زاویہ اج ہ برابر ہی زاویہ قبا د لہ ج لا ف کے  
اور چونکہ ج لا دو متوازی خط مستقیم ی ف اور س د کو نقطوں لا  
اور ک پر کاٹتا ہی

اس لئے زاویہ ج لا ف برابر ہی زاویہ داخلہ لا ک د کے  
اور یہ ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ اج ک برابر ہی زاویہ ج لا ف کے  
اس لئے زاویہ اج ک برابر ہی زاویہ ج لا ک د کے  
اور یہ زاویے قبا د لہ میں

اس لئے اب متوازی ہی س د کا  
اس لئے جو خط مستقیم ایک ہی خط مستقیم کے الخ۔ ہی ثابت کرنا تھا

اگر شکل میں اگر اب اور می ف میں سے ہر ایک متوازی ہو س د کا تو اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ اب اور می ف آپس میں متوازی ہوں گے اقلیدس نے جو صورت ثابت کی ہے وہ ایسی صاف ظاہر ہے کہ ثبوت کی محتاج نہیں ہے کیونکہ جب خط اب اور س د خط می ف سے جو ان کے درمیان ہی نہیں ملتے تو وہ آپس میں بھی کہیں نہ ملیں گے اور اسلئے متوازی ہوں گے

### شکل ۳۱ عملی

دیے ہوئے نقطہ سے ایک ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ دیے ہوئے خط مستقیم کا متوازی ہو

فرض کرو کہ دیا ہوا نقطہ اور ب س دیا ہوا خط مستقیم ہے اسے ایک ایسا خط مستقیم کھینچنا ہے کہ وہ ب س کے متوازی ہو ب س میں کوئی نقطہ د لو اور ا د ملاؤ

خط مستقیم ا د کے نقطہ پر زاویہ د ا ی برابر زاویہ ا د س کے اور ا د کی مقابل سمت میں بناؤ ف  
 اور ی ا کو ف تک بڑھائی  
 تو می ف متوازی ہو گا ب س کا

چونکہ خط مستقیم ا د دو خط مستقیم می ف اور ب س سے ملتا ہے اور ان کے ساتھ زاویے متبادلہ می ا د اور ا د س ایک دوسرے کے برابر بناتا ہے۔  
 اسلئے می ف متوازی ہے ب س کا

اسلئے دیے ہوئے نقطہ سے خط مستقیم می ف متوازی دیے ہوئے خط مستقیم ب س کا کھینچ لیا

اور اسی خط کے کھینچنے کی ضرورت تھی

اس شکل کے بنانے میں بیسوں شکل کی کچھ ضرورت نہ پڑیگی اگر گیارہویں اور بارہویں شکل کی مدد لیتا

## مشق

۱ دیے ہوئے خط مستقیم میں دیں ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اگر اس نقطہ سے ایک دیے ہوئے نقطہ تک خط مستقیم کھینچا جائے تو زاویہ اب س ایک دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

۲ مثلث قائم الزاویہ اب س کے وتر اب میں ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ ب د برابر ہو اس عمود کے جو د سے اس پر گرایا جائے

۳ اب س ایک مثلث متساوی الساقین ہی اسکی برابر ساقوں اب اور اس میں ایسے نقطے د اور ی دریافت کرو کہ خط مستقیم ب د اور د ی اور ی س آپس میں برابر ہوں

۴ مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ ب س کے ساتھ زاویہ قائمہ بنانے والا خط مستقیم ضلع اب کو نقطہ د پر اور س ا کے بڑھے ہوئے حصہ کو نقطہ ی پر کاٹتا ہے تاکہ ب کے کہ ای د مثلث متساوی الساقین ہی

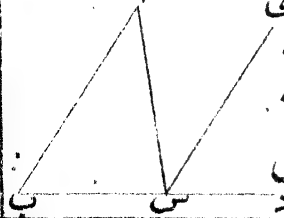
۵ ان مثلثوں میں جنکے راس کا زاویہ ایک ہی ہے اور جنکے قاعدے ایک ہی نقطہ میں ہوں گزرتے ہیں وہ مثلث سب چھوٹا ہو گا جسکے قاعدہ کے اس نقطہ پر دو برابر حصے ہوتے ہیں

## شکل ۳۲ اثباتی

اگر کسی مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو زاویہ خارجہ برابر اپنے سامنے کے دو زاویوں داخلہ کے ہو گا اور تینوں زاویے داخلہ مثلث کے برابر دو قائلوں کے ہوں گے

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہے اور اسکا ضلع ب س نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے

تو زاویہ خارجہ اس د برابر ہو گا اپنے سامنے کے دو زاویوں داخلہ اب س اور ب اس کے اور مثلث کے تینوں زاویے داخلہ اب س اور ب اس کے





اور اس ب ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے

نقطہ سے سے سی متوازی ب اکا کھینچو

شکل ۳۱

چونکہ اب متوازی سی کا ہی اور اس آن پر گرتا ہی

شکل ۳۹

اسلئے زاویے متبادلہ اس ی اور ب اس آپس میں برابر ہیں

پھر چونکہ اب متوازی سی کا ہی اور ب د آن پر گرتا ہی

شکل ۳۹

اسلئے زاویہ خارجہ سی د برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ اب کے

لیکن ثابت ہو چکا ہی کہ زاویہ اس ی برابر ہی زاویہ ب اس کے

اسلئے کل زاویہ خارجہ اس د برابر ہی اپنے سامنے کے دو زاویوں داخلہ

ب اس اور اب س کے

علوم متعارفہ

ان برابر میں سے ہر ایک میں زاویہ اس ب لاؤ

اسلئے زاویہ اس د اور اس ب ملکر برابر ہیں تین زاویوں س ب ا اور

ب اس اور اس ب کے

علوم متعارفہ

لیکن زاویے اس د اور اس ب ملکر برابر دو قائموں کے

شکل ۳۱

اسلئے زاویے س ب ا اور ب اس اور اس ب ملکر برابر دو قائموں کے

شکل ۳۱

اسلئے اگر کسی مثلث کا ایک ضلع الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل میں دو شکلیں مثال ہیں اس شکل کا دوسرا حصہ یعنی مثلث کے تینوں زاویے ملکر

برابر دو قائموں کے ہوتے ہیں بغیر بھائے مثلث کے کسی ضلع کے اسطرح ثابت ہو سکتا ہی

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث ہی تو اسکے تینوں زاویے اب س اور ب س ا اور

شکل ۳۱

س اب ب ملکر برابر دو قائموں کے ہوں گے

نقطہ سے د ای متوازی ب س کا کھینچو

شکل ۳۱

چونکہ د اور ب س آپس میں متوازی ہیں اور اب اپنے گرتا ہی

شکل ۳۱



شکل ۱۹

اسلئے زاویہ اب س برابر ہی زاویہ متبادل اب د کے

اور چونکہ ای اور س ب آپس میں متوازی ہیں اور اس انہر کرتا ہی

شکل ۲۰

اسلئے زاویہ ب س برابر ہی زاویہ متبادل س ای کے

لیکن ثابت ہو چکا کہ زاویہ اب س برابر ہی زاویہ د اب کے

علوم متعارفہ

اسلئے زاویے اب س اور ب س اب ملکر برابر ہیں د اب اور س ای کے

ان برابر ہیں سے ہر ایک میں زاویہ ب اس ملاؤ

اسلئے زاویہ اب س اور ب س اور س اب ملکر برابر ہیں زاویوں د اب اور ب اس اور

علوم متعارفہ

س ای کے

شکل ۲۱

لیکن زاویے د اب اور ب اس اور س ای ملکر برابر ہیں دو قائموں کے

علوم متعارفہ

اسلئے زاویہ اب س اور ب س اب ملکر برابر ہیں دو قائموں کے

اسلئے مثلث کے تینوں زاویے ملکر برابر ہیں دو قائموں کے۔ یہی ثابت کرنا تھا

بے

نتیجہ صریح ۱ ہر ایک شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے داخلے اور بیرونی

ملکر برابر ہوتے ہیں اتنے قائموں کے جو گنتی میں اس شکل کے ضلعوں کی

مقداد سے دو گنے ہوں

اگر کسی شکل مستقیم الاضلاع اب س د ہی کے اندر کوئی نقطہ ف لیا جائے

اور اس نقطہ سے اس شکل کے سب زاویوں تک خط مستقیم کھینچے جائیں تو ظاہر

ہوگا کہ وہ شکل اتنے مثلثوں میں تقسیم ہوگی جتنے اس میں ضلع ہیں

جو کہ مثلث کے تینوں زاویے ملکر برابر ہیں دو قائموں کے

اور یہاں اتنے مثلث ہیں جتنے شکل مستقیم الاضلاع کے

ضلع ہیں

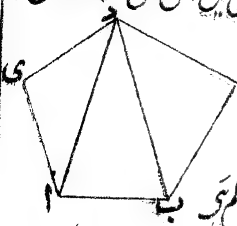
اسلئے ان مثلثوں کے سب زاویے برابر ہیں اتنے قائموں کے جو گنتی میں شکل کے



ضلعوں کی تعداد سے دوئے ہیں  
لیکن ان مثلثوں کے سب زاویے شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویوں  
داخلہ کے اور ان زاویوں کے جو نقطہ ف پر بنے ہیں برابر ہیں  
اور جو زاویے نقطہ ف پر جو ان مثلثوں کا اس مشترک ہی بنے ہیں برابر  
ہیں چار قائموں کے  
اسلئے ان مثلثوں کے سب زاویے برابر ہیں شکل مستقیم الاضلاع کے سب  
زاویوں داخلہ اور چار قائموں کے

لیکن ثابت ہو چکا ہے کہ ان مثلثوں کے سب زاویے اتنے قائموں کے بھی برابر  
ہیں جو گنتی میں شکل مستقیم الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد سے دوئے ہیں  
اسلئے شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے داخلہ اور چار قائمے ملکر برابر  
ہیں اتنے قائموں کے جو گنتی میں شکل مستقیم الاضلاع کی تعداد سے دوئے ہیں  
نتیجہ صیح اسطرح بھی ثابت ہو سکتا ہے

اگر کسی شکل مستقیم الاضلاع اب س دی کے کسی زاویہ د سے سامنے کے زاویوں تک خط مستقیم  
کھینچے جائیں تو ظاہر ہے کہ وہ شکل اتنے مثلثوں میں تقسیم ہو جائیگی جو گنتی میں اس شکل کے ضلعوں کی  
تعداد سے دو کم ہیں



چونکہ مثلث کے تینوں زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہیں  
اور یہاں اتنے مثلث ہیں کہ انکی تعداد شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دو کم ہے  
اسلئے ان مثلثوں کے سب زاویے برابر ہیں اتنے قائموں کے جو گنتی میں شکل کے ضلعوں کی تعداد  
کے دوئے سے چار کم ہیں

لیکن ان مثلثوں کے سب زاویے برابر ہیں شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویوں داخلہ کے  
اسلئے شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے داخلہ ملکر برابر ہیں اتنے قائموں کے جو گنتی میں اس

شکل کے ضلعوں کی تعداد کے دونے سے چار کم ہیں

اسلئے شکل مستقیم الاضلاع کے سب اوپے داخلے اور چار قائلے ملکر برابر ہیں اتنے قائلوں کے جو گنتی میں اس شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دونے ہیں

اس نتیجہ صریح کی مدد سے ہر مستقیم الاضلاع منظم (مستقیم الاضلاع جسکے سب ضلعے اور زاویے آپس میں برابر ہیں) کے زاویہ کی مقدار دریافت ہو سکتی ہے اگر اس کے ضلعوں کی تعداد معلوم ہو

نتیجہ صریح م ہر شکل مستقیم الاضلاع کے سب زاویے خارجے جو اس شکل کے ضلعوں کو ایک دوسرے کے بعد ایک ہی سمت میں بڑھانے سے پیدا ہوتے ہیں

میں ملکر برابر چار قائلوں کے ہوتے ہیں

چونکہ ہر زاویہ داخلہ مثلاً اب اس معہ اپنے بائیں کے زاویہ خارجہ اب کے برابر دو قائلوں کے ہے

اسلئے سب اوپے داخلے معہ اپنے بائیں کے زاویوں خارجہ کے برابر ہیں اتنے قائلوں کے جو گنتی میں اس شکل مستقیم الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد سے دونے ہیں لیکن ہم

اوپر کے نتیجہ صریح سے ثابت آئی کہ شکل مستقیم الاضلاع کے سب اوپے داخلے اور چار قائلے

ملکر برابر ہیں اتنے قائلوں کے جو گنتی میں اس شکل کے ضلعوں کی تعداد سے دونے ہیں

اسلئے سب اوپے داخلے اور سب زاویے خارجے ملکر برابر ہیں سب زاویوں داخلہ

اور چار قائلوں کے

علوم متعارفہ

ان برابروں میں سے زاویے داخلہ نکال ڈالو

اسلئے سب زاویے خارجہ برابر ہیں چار قائلوں کے

اس نتیجہ صریح کی مدد سے ہر مستقیم الاضلاع منظم کے ضلعوں کی تعداد دریافت ہو سکتی ہے اگر اس کے

ایک زاویہ کی مقدار معلوم ہو

یہ دونوں نتیجہ صریح ممکن صاحب زیادہ کہیں یہ ستر نتیجہ صریح میں بیان کرنا چاہئے تھا کہ

شکل مستقیم الاضلاع کے زاویہ خارجہ سے کیا راوی اگر اس نقطہ سے جہاں مستقیم الاضلاع کے دو ضلع ملتے ہیں ان ضلعوں میں سے کوئی ضلع بڑھایا جائے تو زاویہ جو اس ضلع کے بڑھے ہوئے حصہ پر دروس

ضلع سے بنیگا شکل مستقیم الاضلاع کا زاویہ خارجہ ہوگا دو ضلعوں میں سے کوئی سا ضلع بڑھایا جائے ایک ہی بات ہے کیونکہ زاویے جو اس طرح بنینگے دونوں آپس میں بندہوں شکل سے برابر ہوں گے اقلیدس نے انھیں شکل مستقیم الاضلاع کا بیان کیا ہے جبکہ سب زاویوں کا رخ اندر کی طرف ہے ایک درقسم کی شکل

مستقیم الاضلاع بھی ایسی بن سکتی ہے کہ اس میں زاویہ اف س کا رخ باہر کی طرف ہے لیکن یہ زاویہ شکل اف س دی کا زاویہ داخلہ

نہیں ہے اس زاویہ کے عیوض اس شکل میں زاویہ داخلہ دہ زاویہ ہے جس

جو چار قائموں سے بقدر زاویہ اف س کہ ہے ایسے زاویہ داخلہ کو جو دو قائموں سے بڑا ہے زاویہ کمرہ

کہتے ہیں تیسویں شکل کا پہلا نتیجہ صریح تو اس شکل میں بھی نہیں ایک زاویہ یا کئی زاویے داخلہ کمرہ میں ہوتا ہے سنا ہے لیکن دوسرا نتیجہ صریح ایسی شکلوں میں ہوتا ہے جہاں اگر کسی شکل مستقیم الاضلاع

اف س دی کا ایک زاویہ داخلہ کمرہ ہو تو اس طائرے اور اسکو

س کی طرف بڑھانے سے ثابت ہو جائیگا کہ زاویہ اف س

اور ک دی اور ل ی ا ملکر چار قائموں سے بقدر زاویہ ج ف س زیادہ ہیں

تیسویں شکل سے اور بھی کئی ظاہر نتیجے نکلتے ہیں اور وہ یہ ہیں

۳ اگر مثلث کے دو زاویوں کی مقدار معلوم ہے تو تیسرے زاویہ کی مقدار بھی معلوم ہے کیونکہ تینوں

زاویے ملکر برابر دو قائموں کے ہوتے ہیں

۴ اگر مثلث کا ایک زاویہ قائمہ ہے تو باقی دو زاویے ملکر برابر ایک قائمہ کے ہیں اور اگر مثلث کے

دو زاویے ملکر برابر ہیں اس کے تیسرے زاویہ کے تو تیسرا زاویہ قائمہ ہے

۵ اگر مثلث کے دو زاویے ملکر اس کے تیسرے زاویہ سے چھوٹے ہیں تو تیسرا زاویہ منفرج ہے

اور اگر بڑے ہیں تو تیسرا زاویہ حادہ ہے

۶ مثلث متساوی الاضلاع کا ہر ایک زاویہ دو قائموں کی ایک تہائی یعنی ایک قائمہ کی دو تہائی ہے اس نتیجہ صریح کی مدد سے زاویہ قائمہ کے تین برابر حصے ہو سکتے ہیں

۷ اگر مثلث متساوی الساقین کے راس کا زاویہ قائمہ ہی تو باقی دو زاویوں میں سے ہر ایک صاف قائمہ ہے اگر کسی مثلث کے دو زاویے دو سے کم مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہیں تو اس مثلث کا تیسرا زاویہ بھی دو سے کم مثلث کے تیسرے زاویہ کی برابر ہے

۹ شکل ذرا بعد الاضلاع کے سب زاویے ملکر برابر چار قائموں کے ہیں یہ نتیجہ آئندہ کے پہلے نتیجہ کی ایک خاص صورت ہے لیکن چونکہ اسکا کام اکثر جگہوں پر آیا ہے اسلئے یاد رکھنے کے لائق ہے

### مشق

۱ اگر مثلث متساوی الساقین کے قاعدوں کے سروں سے اسکی ساقوں پر عمود گرائے جائیں تو ان زاویوں میں سے جو یہ عمود قاعدہ کے ساتھ پیدا کریں گے ہر ایک راس کے زاویہ سے آدھا ہوگا

۲ کسی مثلث اب اس کے ضلعوں پر باہری طے مثلث متساوی الاضلاع با س د اور س ای اور اب ب بنائے گئے ہیں ثابت کرو کہ خط مستقیم ا د اور بی اور س ب آپس میں برابر ہیں

۳ مندرجہ منظم کے ایک زاویہ کی مقدار بتاؤ (آٹھ ضلع والی شکل کو مشن کہتے ہیں)

۴ ایک مثلث مستقیم الاضلاع منظم کا ایک زاویہ برابر اچھے قائمہ کے ہے یہ بتاؤ کہ اس شکل میں کتنے ضلع ہیں

۵ دو دیے ہوئے نقطوں سے ایسے دو خط مستقیم کھینچو کہ وہ ایک خط مستقیم کے ساتھ جسکا مقام دیا ہو اسی ایک مثلث متساوی الاضلاع بنا دیں یہ بھی بتاؤ کہ کس حالت میں مثلث متساوی الاضلاع بن سکیگا

۶ اگر دو خط مستقیم کسی مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے اوپر کے زاویوں کو دو دو برابر ہوں

میں تقسیم کریں اور وہ خط بڑھ کر کسی نقطہ پر ایک دوسرے سے ملیں تو ثابت کرو کہ زاویہ جو ان خطوں کے ملنے سے پیدا ہوگا مثلث متساوی الساقین کے زاویہ خارجہ کے برابر ہوگا

۷ مثلث متساوی الساقین اب س کا راس ا ہی اور ب نقطہ تک اتنا بڑھایا گیا ہے کہ ا د برابر ا کے ہی اور س دکھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ب س د زاویہ قائمہ ہے

۸ دو خط مستقیم ب د اور س د کسی مثلث اب س کے زاویوں خارجہ ب اور س کے دو د برابر تھے کرتے ہیں اور نقطہ ہ پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ زاویہ ب د س اور آ دھا زاویہ ب ا س ملکر ایک قائمہ ہے

۹ ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ کہ اس کا زاویا اسکے قاعدہ کے اوپر کے ہر ایک زاویہ سے چوگنا ہو

۱۰ مثلث اب س کا ضلع ب س نقطہ ی پر اور ضلع اب نقطہ ج پر دو برابر حصوں میں تقسیم ہوا ہے ای نقطہ ف تک اتنا بڑھایا گیا ہے کہ ی ف برابر ہی ا ی کے اور س ج نقطہ تک اتنا بڑھایا

گیا ہے کہ ج کا برابر ہی س ج کے تو ثابت کرو کہ ف ب اور ف اب ایک ہی خط مستقیم ہیں  
۱۱ ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ کہ اس کے قاعدہ کے اوپر کے ہر ایک زاویہ کی تہائی اسکے راس کے زاویہ کے آدھے کے برابر ہو

۱۲ اب اور اس دو خط مستقیم ہیں جنکا مقام دیا ہو ا ہی ان خطوں میں ایسے دو نقطے ع اور ف دریافت کرو کہ اگر ع ف ملائیں تو ا ع اور ع ف ملکر ایک دیے ہوئے خط مستقیم کے برابر ہوں اور ان کے درمیان کا زاویہ ایک دیے ہوئے زاویہ کی برابر ہو

۱۳ مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے سروں سے راس سے دو سمت میں ایسے دو خط مستقیم کھینچے گئے ہیں کہ ان میں سے ایک قاعدہ کے ساتھ ایسا زاویہ بناتا ہے کہ وہ مثلث کے برابر زاویوں میں سے ہر ایک کا تہائی ہے اور یہ خط اور مثلث کے ضلع بڑھ کر آپس میں ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ تین مثلث جو قاعدہ کے نیچے پیدا ہوں گے متساوی الساقین ہوں گے

۱۴ دو خط مستقیم ای ب اور سی د نقطہ ی پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اور خط مستقیم اس اور د ب و مثلث اس سی اور ب ی د بناتے ہوئے کھینچے ہیں اور زاویے اس سی اور د ب ی خط مستقیم من و اور ب ف سے جو نقطہ ف پر ملتے ہیں دو د برابر حصوں میں تقسیم ہوئے ہیں ثابت کرو کہ زاویے سی اس اوری د ب ملکہ زاویہ من ب ف سے دوئے ہیں

۱۵ اگر مثلث کے کسی زاویہ سے اُس زاویہ کے سامنے کے ضلع کے بیچوں بیچ کے نقطہ تک خط مستقیم کھینچا جائے تو وہ خط مستقیم اُس ضلع کے آدھے کے برابر ہوگا یا اسکے آدھے سے بڑا یا چھوٹا ہوگا مطابق اسکے کہ زاویہ جس سے خط کھینچا گیا ہے قائمہ یا حادہ یا منفرجہ ہے

۱۶ مثلث کا کوئی زاویہ قائمہ یا حادہ یا منفرجہ ہوگا مطابق اسکے کہ خط مستقیم جو اُس زاویہ سے اسکے سامنے کے ضلع کے بیچوں بیچ کے نقطہ تک کھینچا جائے اُس ضلع کے آدھے کے برابر ہے یا اسکے آدھے سے بڑا یا چھوٹا ہے

۱۷ مثلث اب س کے زاویہ اسے اسکے سامنے کے ضلع پر ایک عمود گرایا گیا ہے اور یہ عمود اُس ضلع یا اُس ضلع کے بڑے ہوئے حصہ سے نقطہ د پر ملتا ہے اور زاویہ ب سے اسکے سامنے کے ضلع پر ایک عمود گرایا گیا ہے اور یہ عمود اُس ضلع یا اُس ضلع کے بڑے ہوئے حصہ سے نقطہ ی پر ملتا ہے تو دو خط مستقیم جو نقطوں د اور ی سے قاعدہ اب کے بیچوں بیچ کے نقطہ تک کھینچے جائیں گے آپس میں برابر ہوں گے

۱۸ کسی مثلث کے قاعدہ کے زاویوں سے اُن کے سامنے کے ضلعوں پر عمود گرائے گئے ہیں اور یہ عمود اُن ضلعوں یا اُن کے بڑے ہوئے حصوں سے ملتے ہیں تو وہ خط مستقیم جو اُن نقطوں کے درمیان جہاں عمود ضلعوں یا ضلعوں کے بڑے ہوئے حصوں سے ملتے ہیں کھینچا جائے اُن عمود سے جو قاعدہ کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے اُس خط پر گرایا جائے دو برابر حصوں میں تقسیم ہوگا

۱۹ پہلے متعلقہ کی پہلی شکل میں دائرے نقطوں س اور لا پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اور اب ہر محکمہ ایک دائرہ سے نقطہ ل پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ س ل مثلث متساوی الاضلاع ہے



۲۰ مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ پر کے زاویوں کو دو برابر حصوں میں تقسیم کر دیا  
خط مستقیم مثلث کے ضلعوں سے نقطوں د اوری پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ دی مثلث  
کے قاعدہ کا متوازی ہے

۲۱ اب اور اس دو دیے ہوئے خط مستقیم میں اور اب میں ایک نقطہ ع دیا ہوا ہے ع  
سے ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ اس سے نقطہ ف پر ملے زاویہ ا ع ف زاویہ ا ب غ  
سے ملنا بناوے

۲۲ مثلث قائم الزاویہ بناؤ جسکے دو ضلعوں کا جوڑا اور وتر معلوم ہے  
۲۳ مثلث قائم الزاویہ بناؤ جسکے دو ضلعوں کا فرق اور وتر معلوم ہے  
۲۴ مثلث قائم الزاویہ بناؤ جسکا وتر اور عمود جو وتر پر زاویہ قائمہ سے گزرتی معلوم ہے  
۲۵ مثلث قائم الزاویہ بناؤ جسکے تینوں ضلعوں کا جوڑا اور جسکا ایک زاویہ معلوم ہے  
۲۶ زاویہ قائمہ کے تین برابر حصے کرو

۲۷ ایک مدد خط مستقیم کے تین برابر حصے کرو  
۲۸ دیے ہوئے نقطہ سے دو متوازی خط مستقیم تک ایسے دو برابر خط مستقیم کھینچو کہ وہ  
ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتے ہوں

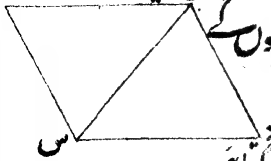
۲۹ مثلث جسکے تینوں ضلعوں کا جوڑا معلوم ہے ایسا بناؤ کہ اُسکے زاویہ کسی دیے ہوئے  
مثلث کے زاویوں کے برابر ہوں

۳۰ مثلث اب س کے زاویہ خارج ب س د کو خط مستقیم س ی اور زاویہ د خ ل  
ب اس کو خط مستقیم ای دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا ہے اور یہ دونوں خط نقطہ ی پر ملتے  
ہیں ثابت کرو کہ زاویہ ای س زاویہ اب س کا آدھا ہے

شکل ۳۳

خط مستقیم جو دو برابر اور متوازی خط مستقیم کے ایک ایک طرف کے بیڑل

کو ملائے میں آپس میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں  
 فرض کرو کہ اب اور س دو برابر اور متوازی خط مستقیم ہیں اور ان کے ایک  
 ایک طرف کے سروں کو خط مستقیم اس اور ب د ملائے ہیں  
 تو اس اور ب د آپس میں برابر اور متوازی ہوں گے  
 ب س ملاؤ



چونکہ اب متوازی س د کا ہی اور ب س آپس کرتا ہے  
 اس لئے زاویہ اب س برابر ہی زاویہ ب س د کے  
 اور چونکہ اب برابر ہی س د کے اور ب س دو مثلث اب س اور ب س میں  
 مشترک ہی یعنی دو ضلع اب اور ب س الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں د س  
 اور س ب کے اور زاویہ اب س برابر زاویہ ب س د کے ثابت  
 ہو چکا ہے

اس لئے قاعدہ اس برابر ہی قاعدہ ب د کے اور مثلث اب س برابر ہی مثلث  
 د س ب کے اور باقی زاویے ایک مثلث کے برابر ہیں دوسرے مثلث کے  
 باقی زاویوں کے یعنی وہ زاویے آپس میں برابر ہیں جن کے سامنے برابر ضلع ہیں  
 اس لئے زاویہ اس ب برابر ہی زاویہ ب د کے  
 اور چونکہ خط مستقیم ب س دو خط مستقیم اس اور ب د پر گر کر ان کے ساتھ  
 برابر زاویے قیام لے اس ب اور س ب د بناتا ہے

اس لئے اس متوازی ہی س د کا  
 اور اس برابر ب د کے ثابت ہو چکا ہے

اس لئے خط مستقیم جو دو برابر اور متوازی خط مستقیم کے الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
 جس شکل میں یہ شرط کہ خط مستقیم ایک ایک طرف کے سروں کو ملائے ہیں ضروری ہے کہ

اگر یہ شرط ہو تو مشہد پر لگا کہ آیا خط مستقیم اس اورب د نقطوں اورس کو اورب اورد کو ملاتے ہیں یا خط مستقیم اورب سے نقطوں اورد کو اورب اورس کو ملاتے ہیں اس شکل سے یہ نتیجہ صاف ظاہر ہے کہ اگر کسی شکل ذوالربع الاضلاع کے آٹھ سائے کے دو ضلع برابر اور متوازی ہوں تو وہ شکل متوازی الاضلاع ہوگی

### مشق

اگر کوئی خط مستقیم جو دو غیر متوازی برابر خط مستقیم کے ایک ہی طرف کے سروں کو ملاتا ہے ان خطوں کے ساتھ اپنی ایک طرف میں برابر زاویے پیدا کرے تو ثابت کرو کہ ان خطوں کے دوسری طرف کے سروں کو ملانے والا خط مستقیم متوازی پہلے خط مستقیم کا ہوگا  
م مثلث کے قاعدہ کے سروں سے جو خط مستقیم سامنے کے ضلعوں تک کھینچے جائیں وہ کسی صورت میں ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں نہ کاٹیں گے

### شکل ۳۴ اثباتی

متوازی الاضلاع کے آٹھ سائے کے ضلع اور زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں اور قطر اسکو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے

قرض کرو کہ اب دس متوازی الاضلاع ہی اورب سے اسکا قطر ہی تو اب برابر ہوگا س د کے اور اس برابر د کے اور زاویہ اب د برابر زاویہ اس د کے اور زاویہ ب اس برابر زاویہ ب د کے اور قطر ب سے متوازی الاضلاع اب دس کے دو برابر حصے کرے گا

چونکہ اب متوازی سے دکائی اورب سے انپر گرتا ہے اسلئے زاویہ اب سے برابر ہی زاویہ قبا د ب سے د کے اور چونکہ اس متوازی ہی ب دکا اورب سے انپر گرتا ہے

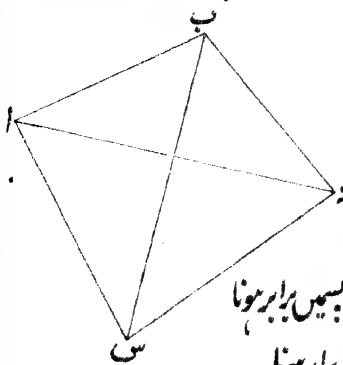
اسلئے زاویہ اس ب برابر ہی زاویہ تبادله میں ب د کے  
 اب چونکہ دو مثلث اب س اور ب س میں ایک مثلث کے دو زاویے  
 اب س اور ب س الگ الگ برابر ہیں دوسرے مثلث کے دو زاویوں ب س  
 اور س ب د کے اور ضلع ب س دونوں مثلثوں میں مشترک ہی  
 اسلئے باقی ضلع ان مثلثوں کے الگ الگ برابر ہیں اور ایک مثلث کا تیسرا  
 زاویہ برابر دوسرے مثلث کے تیسرے زاویہ کے یعنی ضلع اب برابر ہی ضلع  
 س د کے اور ضلع اس برابر ب د کے اور زاویہ ب اس برابر زاویہ ب د س  
 کے

پھر چونکہ زاویہ اب س برابر زاویہ ب س د کے ہی اور زاویہ س ب د  
 برابر زاویہ اس ب کے ہی  
 اسلئے کل زاویہ اب د برابر ہی کل زاویہ اس د کے  
 اور زاویہ ب اس برابر زاویہ ب د س کے ثابت ہو چکا ہی  
 اسلئے متوازی الاضلاع کے آٹے سائے کے ضلع اور زاویے آپس میں  
 برابر ہوتے ہیں اور قطر متوازی الاضلاع کے دو برابر حصے کرتا ہی  
 چونکہ اب برابر ہی س د کے اور ب س مشترک ہی یعنی دو ضلع اب اور  
 ب س الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں د س اور س ب کے  
 اور زاویہ اب س برابر زاویہ ب س د کے ثابت ہو چکا ہی  
 اسلئے مثلث اب س برابر ہی مثلث د س ب کے  
 اسلئے قطر ب س متوازی الاضلاع اب د س کے دو برابر حصے کرتا  
 ہی۔ یہی ثابت کرنا تھا

اگر اس شکل میں دوسرا قطر بھی کھینچا جائے تو ثابت ہو سکتا ہی کہ دونوں قطر ایک دوسرے

کے دو برابر حصے کریں گے اگر متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہی تو اس کے سب زاویے قائمے ہوں گے اور دونوں قطر آپس میں برابر ہوں گے اور اگر متوازی الاضلاع مربع یا مستطین ہی تو اس کے قطر ایک دوسرے کے دو برابر حصے کریں گے اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویے قائمے بنائیں گے طالب علم کو چاہیے کہ ان باتوں کو ثابت کر کے یاد رکھے کہ یہ برے کام کی باتیں ہیں اس شکل میں تین شکل شامل ہیں پہلے یہ کہ متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلع برابر ہوتے ہیں دوسرے یہ کہ متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے زاویے برابر ہوتے ہیں تیسرے یہ کہ متوازی الاضلاع کا ہر قطر اس کے دو برابر حصے کرتا ہے ان تینوں شکلوں کے عکس یعنی ”اگر کسی ذوالاربعة الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلع یا آمنے سامنے کے زاویے آپس میں برابر ہوں یا ذوالاربعة الاضلاع کا ہر قطر اس کے دو برابر حصے کرتا ہو تو وہ ذوالربعة الاضلاع متوازی الاضلاع ہوگی“ اُفقیدس نے نہیں ثابت کئے ہیں یہ عکس ہر حالت میں صحیح ہیں طالب علم کو چاہیے کہ ان کو ثابت کر کے یاد رکھے

اگر کسی شکل ذوالاربعة الاضلاع اب دس میں جس کے وتر ادا اور ب س ہیں نیچے لکھی ہوئی دس خاصیتوں میں سے کوئی دو خاصیتیں باقی جاویں تو ثابت ہو سکتا ہے کہ وہ شکل متوازی الاضلاع ہوگی



- ۱ اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا
- ۲ اس اور ب د کا آپس میں متوازی ہونا
- ۳ اب اور س د کا آپس میں برابر ہونا
- ۴ اس اور ب د کا آپس میں برابر ہونا
- ۵ زاویوں ب ا س اور س د ب کا آپس میں برابر ہونا
- ۶ زاویوں ا ب د اور د س ا کا آپس میں برابر ہونا
- ۷ ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۸ ا د ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

- ۹ اد سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا  
 ۱۰ ب س سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا  
 جب ان دس خاصیتوں میں سے تم دو دو کی ترتیب لو گے تو یہ پتہ پیش کرتے ہیں پیدا ہوں گی

- ۱ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } اس اور ب د کا آپس میں متوازی ہونا  
 ۲ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } اب اور س د کا آپس میں برابر ہونا  
 ۳ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } اس اور ب د کا آپس میں برابر ہونا  
 ۴ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } زاویوں ب اس اور س د کا آپس میں برابر ہونا  
 ۵ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } زاویوں اب د اور دس کا آپس میں برابر ہونا  
 ۶ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا  
 ۷ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا  
 ۸ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } اد سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا  
 ۹ } اب اور س د کا آپس میں متوازی ہونا  
 } ب س سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

- ۱۰ } اس اور ب دکا آپس میں متوازی ہونا  
 } اب اور س دکا آپس میں برابر ہونا
- ۱۱ } اس اور ب دکا آپس میں متوازی ہونا  
 } اس اور ب دکا آپس میں برابر ہونا
- ۱۲ } اس اور ب دکا آپس میں متوازی ہونا  
 } زاویوں ب اس اور س دب کا آپس میں برابر ہونا
- ۱۳ } اس اور ب دکا آپس میں متوازی ہونا  
 } زاویوں اب د اور دس اکا آپس میں برابر ہونا
- ۱۴ } اس اور ب دکا آپس میں متوازی ہونا  
 } ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۱۵ } اس اور ب دکا آپس میں متوازی ہونا  
 } اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۱۶ } اس اور ب دکا آپس میں متوازی ہونا  
 } اد سے دو ارباقہ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۱۷ } اس اور ب دکا آپس میں متوازی ہونا  
 } ب س سے دو ارباقہ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۱۸ } اب اور س دکا آپس میں برابر ہونا  
 } اس اور ب دکا آپس میں برابر ہونا
- ۱۹ } اب اور س دکا آپس میں برابر ہونا  
 } زاویوں ب اس اور س دب کا آپس میں برابر ہونا
- ۲۰ } اب اور س دکا آپس میں برابر ہونا  
 } زاویوں اب د اور دس اکا آپس میں برابر ہونا

- ۲۱ } اب اور سی دکا آپس میں برابر ہونا  
 } ب سی کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۲۲ } اب اور سی دکا آپس میں برابر ہونا  
 } اد کا ب سی کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۲۳ } اب اور سی دکا آپس میں برابر ہونا  
 } اد سے ذواربۃ الاضلاع اب د سی کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۲۴ } اب اور سی دکا آپس میں برابر ہونا  
 } ب سی سے ذواربۃ الاضلاع اب د سی کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۲۵ } اس اور ب دکا آپس میں برابر ہونا  
 } زاویوں ب اس اور سی د ب کا آپس میں برابر ہونا
- ۲۶ } اس اور ب دکا آپس میں برابر ہونا  
 } زاویوں اب د اور د سی ا کا آپس میں برابر ہونا
- ۲۷ } اس اور ب دکا آپس میں برابر ہونا  
 } ب سی کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۲۸ } اس اور ب دکا آپس میں برابر ہونا  
 } اد کا ب سی کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۲۹ } اس اور ب دکا آپس میں برابر ہونا  
 } اد سے ذواربۃ الاضلاع اب د سی کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۳۰ } اس اور ب دکا آپس میں برابر ہونا  
 } ب سی سے ذواربۃ الاضلاع اب د سی کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۳۱ } زاویوں ب اس اور سی د ب کا آپس میں برابر ہونا  
 } زاویوں اب د اور د سی ا کا آپس میں برابر ہونا



- ۳۲ } زاویوں ب اس اور س د ب کا آپس میں برابر ہونا  
 ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۳۳ } زاویوں ب اس اور س د ب کا آپس میں برابر ہونا  
 اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۳۴ } زاویوں ب اس اور س د ب کا آپس میں برابر ہونا  
 اد سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۳۵ } زاویوں ب اس اور س د ب کا آپس میں برابر ہونا  
 ب س سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۳۶ } زاویوں اب د اور دس اکا آپس میں برابر ہونا  
 ب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۳۷ } زاویوں اب د اور دس اکا آپس میں برابر ہونا  
 اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۳۸ } زاویوں اب د اور دس اکا آپس میں برابر ہونا  
 اد سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۳۹ } زاویوں اب د اور دس اکا آپس میں برابر ہونا  
 ب س سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۴۰ } اب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا  
 اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا
- ۴۱ } اب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا  
 اد سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا
- ۴۲ } اب س کا اد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا  
 ب س سے ذواربۃ الاضلاع اب دس کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

۴۳

اد سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

اد کا ب س کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا

۴۴

ب س سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

اد سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

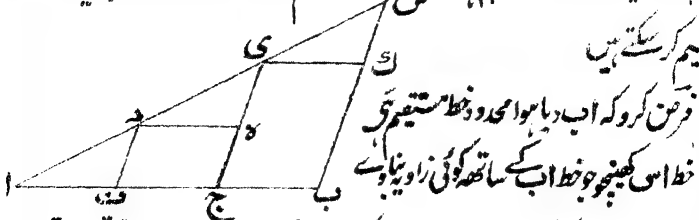
۴۵

ب س سے ذو اربعۃ الاضلاع اب د س کی سطح کا دو برابر حصوں میں تقسیم ہونا

اگر ان پتالیس ترتیبوں میں سے کوئی ترتیب و خاصیتوں کی ذو اربعۃ الاضلاع میں پائی جائیگی تو ثابت ہو سکتا ہے کہ باقی آٹھ خاصیتیں بھی ذو اربعۃ الاضلاع میں ہوں گی اسلئے پتالیس ترتیبوں سے پتالیس شکلیں بن سکتی ہیں اور چونکہ ان پتالیس شکلوں میں سے ہر ایک کے تالی میں آٹھ باتیں ہوں گی اسلئے ہر ایک شکل سے آٹھ شکلیں جنکے تالی میں ایک ایک بات ہوں گی یعنی پتالیس شکلوں سے تین سو ساٹھ شکلیں پیدا ہوں گی یہ بھی یاد رکھنا چاہئے کہ جو شکلیں تیسری اور دسویں اور پچیسویں اور اسیسویں اور پتالیسویں ترتیبوں سے پیدا ہوں گی ہر حالت میں وہ صحیح ہوں گی طالب علم کو جانئے کہ ان سب شکلوں کو تیار کر کر ثابت کرے

چونیسویں شکل کی مدد سے ہم ایک ہی دو خط مستقیم کو جتنے برابر حصوں میں چاہیں اس طرح

تقسیم کر سکتے ہیں



فرض کرو کہ اب د یا ہوا می دو خط مستقیم ہوں

خط اس کھینچو جو خط اب کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے

اور اس خط میں سے کوئی حصہ ا د لے لو اور ا د کی برابر حصہ دی اوری سے لگاتار بناتے جاؤ یہاں تک کہ یہ سب حصے اتنے بولگے ہیں جتنے حصوں میں ہم دیے ہوئے خط اب کو تقسیم کرنا چاہتے ہیں

س ب کو ملاؤ اوری ج اور د ف متوازی س ب کے کھینچو

نہو خط مستقیم اب اتنے حصوں میں تقسیم ہو جائیگا جتنے حصوں میں ہم چاہتے ہیں

دہ اور ی ک متوازی اب کے کھینچو

شکل ۳۰

چونکہ دہ اور ی ک اور اب آپس میں متوازی ہیں

شکل ۳۱

اسلئے زاویے ی ک اور ی دہ اور د ا ف سب آپس میں برابر ہیں

شکل ۳۲

اور چونکہ س ک اور ی ک اور د ف آپس میں متوازی ہیں

شکل ۳۳

اسلئے زاویے ی س ک اور د ی ک اور ا د ف سب آپس میں برابر ہیں

شکل ۳۴

اور ی س اور د ی اور ا د برابر بنائے گئے ہیں

شکل ۳۵

اسلئے ی ک اور دہ اور ا ف آپس میں برابر ہیں

اور چونکہ ی ک برابر ہی ج ب کے اور دہ برابر ج کے

علوم متعارفہ

اسلئے ج ب اور د ج اور ا ف آپس میں برابر ہیں

### مشق

۱ اگر کسی دو ارباقہ الاضلاع کے دو ضلع متوازی ہوں اور باقی دو ضلع برابر ہوں لیکن متوازی

نہوں تو اس کے ہر ایک د آٹنے سامنے کے زاویے ملکر برابر دو قاعوں کے ہوں گے

۲ اگر کسی متوازی الاضلاع کے دو آٹنے سامنے کے زاویوں کو ملا کر الاخط مستقیم ان زاویوں

دو برابر حصے کرے تو اس متوازی الاضلاع کے چاروں ضلع آپس میں برابر ہوں گے

۳ دیے ہوئے نقطہ سے ایک ایسا خط کھینچو کہ اس کا وہ حصہ جو دو دیے ہوئے متوازی خطوں

کے درمیان ہو ایک ہی ہوئی لمبائی کا ہو

۴ خط مستقیم جو کسی متوازی الاضلاع کے دو متصل کے زاویوں کے دو برابر حصے کرتے

ہیں زاویہ قائمہ بناتے ہوئے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں

۵ متوازی الاضلاع کے دو آٹنے سامنے کے زاویوں کو دو برابر حصوں میں تقسیم کر دو

خط مستقیم یا متوازی ہوتے ہیں یا ایک دوسرے کو ڈھک لیتے ہیں

۶ اگر کسی متوازی الاضلاع کے قطر آپس میں برابر ہوں تو اس کے سب زاویے بھی آپس میں برابر ہوں گے

۷ ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اگر اس سے دو دیے ہوئے خط مستقیم بر عود گرائے جائیں تو وہ عمود دو اور دیے ہوئے خط مستقیم کے برابر ہوں۔ اور بلا و ایسے کتنے نقطے دریافت ہو سکتے ہیں  
۸ ایک ایسا خط مستقیم کھینچو جو ایک خط مستقیم کے برابر ہو اور دوسرے خط مستقیم کا متوازی ہو اور اس کے سرے دو اور دیے ہوئے خط مستقیم پر ہوں

۹ متوازی الاضلاع اب س د کے ضلعوں اب اور س د پر مثلث تساوی الاضلاع  
۱۰ اس طرح بنائے گئے ہیں کہ ب س برآسی طرف جس طرف متوازی الاضلاع ہی اور اب اور س د پر سامنے کی طرف میں تو ثابت کرو کہ اب اور س د پر کے مثلثوں کے راسوں کی دوریاں اس مثلث کے راس سے جو ب س پر بنا ہی الگ الگ برابر ہیں متوازی الاضلاع کے طور اس اور ب د کے اگر کسی متوازی الاضلاع کا زاویہ زیادہ ہوتا جائے لیکن ان ضلعوں کی لمبائی جن سے وہ زاویہ بنا ہے نہ بڑھے تو قطر جو اس زاویہ کی راس میں ہو کر گذرنا ہی کم ہوتا جائیگا

۱۱ اب اور س د میں ایسے نقطے ایک خط مستقیم میں ہیں کہ اب برابر ب س کے ہی تو ثابت کرو کہ عمود جو ا اور س سے کسی خط مستقیم پر جو ا اور س کے درمیان نہ گذرنا ہو گرائے جائیں دونوں ملکر دوئے ہوں گے اس عمود کے جو ب سے اس خط پر گرایا جائے۔

۱۲ اگر متوازی الاضلاع کے زاویوں سے کسی خط مستقیم پر جو متوازی الاضلاع کے باہر عمود گرائے جائیں تو دو عمود جو آمنے سامنے کے زاویوں سے گریں گے ملکر برابر ہوں گے ان دو عمود کے جو دوسرے دو آمنے سامنے کے زاویوں سے گریں گے

۱۳ اگر چھ ضلع ایچ اے اے اے اے اے اے کے آمنے سامنے کے ضلع آپس میں برابر اور متوازی ہوں تو تینوں خط مستقیم بنائے سامنے کے ضلعوں کو ملائیں گے آپس میں ایک ہی نقطہ پڑائیں گے

۱۴ اب اور اے دو دیے ہوئے خط مستقیم ہیں اور ان کے درمیان ی دیا ہوا نقطہ جی ہے  
۱۵ ایسا خط مستقیم ج ی کھینچو کہ اس کا ص د جو دیے ہوئے خطوں کے درمیان ہو نقطہ ی پر دو برابر مکروں میں تقسیم ہو

۱۵ دیے ہوئے متوازی الاضلاع کے اندر ایک ایسا معین بناؤ کہ اُسکے ایک زاویہ کا راس متوازی الاضلاع کے ایک ضلع کے دیے ہوئے نقطہ پر ہو

۱۶ اب س د ایک متوازی الاضلاع ہی اوری اور ف ضلعوں ا د اور ب س کے بیچوں بیچ کے نقطے ہیں ثابت کرو کہ بی اور د ف قطر اس کو تین برابر حصوں میں تقسیم کریں گے

۱۷ سطح متوازی الاضلاع کو اُسکے ایک ضلع کے ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچ کر دو برابر حصوں میں تقسیم کرو

### شکل ۴۵ ثباتی

متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوتی ہیں آپس میں برابر ہوتی ہیں

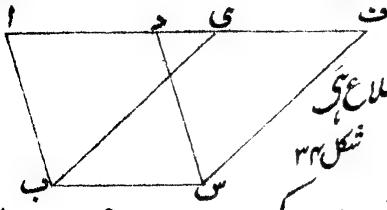
فرض کریں کہ متوازی الاضلاع اب س د اوری ب س ت ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ت کے درمیان ہیں تو متوازی الاضلاع اب س د اوری ب س ت آپس میں برابر ہوں گی

اگر متوازی الاضلاع اب س د اور ب س ت کے ضلع ا د اور د ف جو قاعدہ ب س کے سامنے ہیں برابر ہوں تو ایک ہی نقطہ پر ختم ہوں تو ظاہر ہے کہ یہ متوازی الاضلاع مثلث ب د س کی دو فنی ہوگی

اس لئے متوازی الاضلاع اب س د برابر ہوگی متوازی الاضلاع ب س ت کے علاوہ متوازی

لیکن اگر متوازی الاضلاع اب س د اوری ب س ت کے ضلع ا د اور د ف جو قاعدہ ب س کے سامنے ہیں ایک ہی نقطہ پر

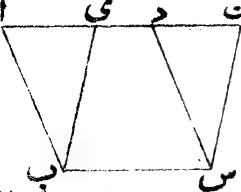
نہیں ختم ہوتے ہیں



تو چونکہ اب س د متوازی الاضلاع ہے

اسلئے ا د برابر ہے ب س کے

اور اسی وجہ سے ی ت برابر ہے ب س کے



اسلئے ا د برابر ہے ی ت کے

اور د ی مشترک ہے

اسلئے کل یا باقی ای برابر ہے کل یا باقی د ت کے

اور اب برابر ہے د س کے

اب مثلث ی اب اور ف د س میں

چونکہ ف د برابر ہے ی اب کے اور د س برابر اب کے

اور زاویہ خارجہ ف د س برابر ہے ی اب کے زاویہ داخلی اب کے

اسلئے مثلث ف د س برابر ہے مثلث ی اب کے

منحرف اب س ف ت میں سے مثلث ف د س نکال ڈالو

اور اسی منحنف میں سے مثلث ی اب کو نکال ڈالو

تو جو شکلیں باقی رہیں گی وہ آپس میں برابر ہوں گی

اسلئے متوازی الاضلاع اب س د برابر ہے متوازی الاضلاع ی ب ت

کے اسلئے متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر اور الخ یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کی تینوں صورتیں ایک ہی طور پر اس طرح ثابت ہو سکتی ہیں

فرض کرو کہ اب س د اور ی ب س ت ایک ہی قاعدہ ب س اور ایک ہی متوازی

دھڑوں ب س اور ف کے درمیان ہیں (پہلی صورت میں د اور ی ایک ہی نقطہ ہے)

تو متوازی الاضلاع اب س د برابر ہوگی متوازی الاضلاع ی ب س ت کے

چونکہ اٹھ دو متوازی خطوں اب اور دس پر گزرتا ہے  
اسلئے زاویہ خارجہ دس برابر ہے اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ای اب کے شکل ۱۹  
اور چونکہ اٹھ دو متوازی خطوں ای ب اور دس پر گزرتا ہے  
اسلئے زاویہ خارجہ ای ب برابر ہے اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ دس کے شکل ۲۰  
اب مثلث دس اور ای اب میں

چونکہ زاویہ دس برابر ہے زاویہ ای اب کے اور زاویہ دس برابر زاویہ ای ب  
کے اور ضلع دس برابر ضلع اب کے

اسلئے مثلث دس سب طرح برابر ہے مثلث ای اب کے شکل  
۲۱ نیز اب میں دس سے مثلث دس نکال ڈالو  
اور یہی مثلث دس سے مثلث ای اب نکال ڈالو

تو شکلیں جو باقی رہیں گی آپس میں برابر ہوگی  
اسلئے متوازی الاضلاع اب س برابر ہے متوازی الاضلاع ای ب س کا ہے  
اسلئے متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان  
میں شکل میں اور اسکے آگے کی کئی شکلوں میں برابر ہونے سے یہ مطلب ہے کہ سطحوں کے

صرف نتیجے برابر ہیں

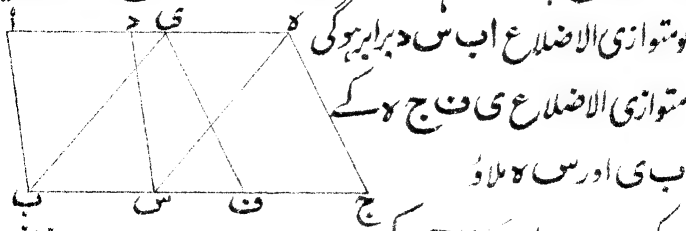
سطحوں کی مساحت یعنی زیریں کی پیمائش کی بنیاد اسی شکل پر ہے چونکہ روزمرہ کی کارروائی  
میں قائم الزوایا کا رقبہ اسکی لمبائی کو چوڑائی کے ساتھ یعنی قاعدہ کو اوچائی کے ساتھ گنا کرنے سے  
دریافت کیا جاتا ہے اور چونکہ اس شکل سے ثابت ہے کہ جس متوازی الاضلاع کا قاعدہ اور اسکی اوچائی  
یعنے متوازی خطوں کے درمیان کی سطح کی چوڑائی کسی قائم الزوایا کا قاعدہ اور اسکی اوچائی ہی تو اس  
متوازی الاضلاع کا رقبہ اس قائم الزوایا کے رقبہ کے برابر ہے اسلئے ہر متوازی الاضلاع کا رقبہ اسکے  
قاعدہ کی لمبائی اور اسکی اوچائی کو آپس میں گنا کرنے سے دریافت ہوتا ہے

اس شکل کا عکس اپنی متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے ایک ہی طرف میں ہیں  
جسے رقبے آپس میں برابر ہیں ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں گے اقلیدس نے نہیں ثابت کیا ہے  
طالب علم آپ اسکو ثابت کرے

### شکل ۳۶ اثباتی

متوازی الاضلاع جو برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے  
درمیان ہوتی ہیں آپس میں برابر ہوتی ہیں

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع اب س د اور ی ف ج ہ برابر قاعدوں  
ب س اور ف ج پر اور ایک ہی متوازی خطوں ا ل اور ب ج کے درمیان ہیں  
تو متوازی الاضلاع اب س د برابر ہوگی



متوازی الاضلاع ی ف ج ہ کے  
ب ی اور س ل ملاؤ  
چونکہ ب س برابر ہے ی ف ج کے  
اور ف ج برابر ہے ی ل کے  
اسلئے ب س برابر ہے ی ل کے

اور یہ دونوں آپس میں متوازی بھی ہیں اور ان خطوں کے ایک ایک طرف کے  
سروں کو خط مستقیم ب ی اور س ل ملاتے ہیں

لیکن جو خط مستقیم کسی دو برابر اور متوازی خط مستقیم کے ایک ایک  
طرف کے سروں کو ملاتے ہیں وہ آپس میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں

اسلئے ب ی اور س ل آپس میں برابر اور متوازی ہیں  
اسلئے ی ب س ل متوازی الاضلاع ہے

چونکہ متوازی الاضلاع اب س د اور ی ب س ل ایک ہی قاعدہ



ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ا کے درمیان ہیں  
اسلئے متوازی الاضلاع اب س د برابر ہی متوازی الاضلاع ی ب س کا  
اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ متوازی الاضلاع ی ف ج د برابر ہی متوازی  
الاضلاع ی ب س کے

اسلئے متوازی الاضلاع ا ب س د برابر ہی متوازی الاضلاع ی ف ج کے  
اسلئے متوازی الاضلاع جو برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی الخ یہی  
ثابت کرنا تھا

اس شکل کا عکس برابر متوازی الاضلاع جو برابر قاعدوں پر جو ایک ہی خط مستقیم میں ہیں اور  
ان قاعدوں کے ایک ہی طرف ہیں ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہو گئی ثابت کرو  
اس شکل اور پیشویں شکل کا دوسرا عکس بھی یعنی برابر متوازی الاضلاع جو ایک ہی متوازی خطوں  
کے درمیان ہیں یا تو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر قاعدوں پر ہوں گی صحیح ہی اسکو ثابت کرو  
یہ وہ پیشویں شکل اسی طرح بھی میان کی جاتی ہے متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر  
قاعدوں پر ہوتی ہیں اور جہکی اوپا کئیاں برابر ہوتی ہیں آپس میں برابر ہوتی ہیں  
مشق

ا اگر کسی شکل ذوزائفہ کے دو متوازی ضلعے ملکر کسی متوازی الاضلاع کے قاعدہ کے دو ٹپے  
ہوں اور وہ ذوزائفہ اور متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں تو ذوزائفہ  
اور متوازی الاضلاع آپس میں برابر ہوں گے

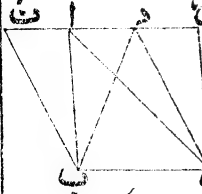
م اگر کسی مثلث اب س کے ضلعوں اب اور اس پر متوازی الاضلاع ف ب ا ج  
اور ا س ک بنائی گئی ہیں اور ان کے ضلعے ف ج اور ا کے جو مثلث اب س کے  
ضلعوں کے متوازی ہیں نقطہ ب پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں یا بڑھ کر آپس میں ملتے ہیں تو  
یہ دونوں متوازی الاضلاع ملکر برابر ہوں گے متوازی الاضلاع ب د ی س کے جو مثلث کے

قاعدہ ب س پر بنائی گئی ہے اور جس کا ضلع ب د برابر اور متوازی لٹا کا ہے

### شکل ۳۳ اثباتی

جو مثلث ایک ہی قاعدہ پر ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں  
آپس میں برابر ہوں گے

فرض کرو کہ مثلث اب س اور د ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر  
اور ایک ہی متوازی خطوں ا د اور ب س کے درمیان ہیں



تو مثلث اب س برابر ہوگا مثلث د ب س کے

ا د کو دونوں طرف سے اور فٹ تک بڑھاؤ

س سے س ی متوازی اب کا اور ب س کا کچھ

تو اب س ی اور د س ب ف متوازی الاضلاع ہیں

اور چونکہ یہ متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ ب س اور ایک ہی متوازی  
خطوں ا د اور ب س کے درمیان ہیں

اس لئے متوازی الاضلاع اب س ی برابر ہی متوازی الاضلاع  
د س ب ف کے

اور مثلث اب س متوازی الاضلاع اب س ی کا آدھا ہے کیونکہ

قطر اس متوازی الاضلاع کے دو برابر حصے کرتا ہے

اور مثلث د ب س متوازی الاضلاع د س ب ف کا آدھا ہے کیونکہ

قطر د ب متوازی الاضلاع کے دو برابر حصے کرتا ہے

لیکن برابر چیزوں کے آدھے آپس میں برابر ہوتے ہیں

اس لئے مثلث اب س برابر ہی مثلث د ب س کے

اس لئے جو مثلث ایک ہی قاعدہ پر ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہیں وہ برابر ہوتے ہیں

## مشق

۱ اب س دیا ہوا مثلث ہی ایک ایسا مثلث بناؤ کہ اس کا رقبہ دس گئے ہوئے مثلث کے

رقبہ کے برابر ہو اور اس کا قاعدہ دیا ہوا خط اد جو اب کے مقام پر پڑتا ہی ہو

۲ اب س دیا ہوا مثلث ہی ایک ایسا مثلث بناؤ کہ اس کا راس ب س کے دس گئے ہوئے

نقطہ پر ہو اور اس کا قاعدہ اسی خط مستقیم میں ہو جس میں اب ہی اور اس کا رقبہ دس گئے ہوئے مثلث کے رقبہ کے برابر ہو

۳ اب س دیا ہوا مثلث ہی ایک ایسا مثلث بناؤ کہ اس کا رقبہ دس گئے ہوئے مثلث کے

رقبہ کے برابر ہو اور اس کا قاعدہ اسی خط مستقیم میں ہو جس میں اب ہی اور اس کا راس ایک گئے ہوئے خط میں جو اب کا متوازی ہی ہو

۴ اب س د دی ہوئی ذواربۃ الاضلاع ہی اس کے ضلع اب پر ایک ایسی ذواربۃ الاضلاع

بناؤ کہ اس کا رقبہ دی ہوئی ذواربۃ الاضلاع کے برابر ہو اور اس کا ایک ضلع س د کے ایک گئے ہوئے نقطہ میں ہو کہ گزرے اور اب کا متوازی ہو

۵ اب س د دی ہوئی ذواربۃ الاضلاع ہی ایک ایسا مثلث بناؤ کہ اس کا قاعدہ اب کی

سیدھ میں ہو اور اس کا راس ضلع س د کے دس گئے ہوئے نقطہ پر ہو اور اس کا رقبہ دی ہوئی ذواربۃ الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہو

۶ کسی مستقیم الاضلاع کے برابر ایک مثلث بناؤ

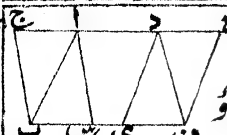
## شکل ۳۸ انتہائی

جو مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں وہ

ایسے ہی برابر ہوتے ہیں

فرض کرو کہ مثلث اب س اور دی ف برابر قاعدوں ب س اور دی ف

پر اور ایک ہی متوازی خطوں اد اور ب ف کے درمیان ہیں



تو مثلث اب س برابر ہو گا مثلث دی ف کے  
اد کو دونوں طرف ج اور ہ نقطوں تک بڑھاؤ  
ب سے ب ج متوازی اس کا اور ف سے ف ہ متوازی دی کا کھینچو شکل  
زوج ب س اور دی ف ہ میں سے ہر ایک متوازی الاضلاع ہے  
اور چونکہ یہ متوازی الاضلاع برابر قاعدوں ب س اور ف ہ پر اور ایک  
ہی متوازی خطوں کے درمیان ہیں

شکل ۳۲

اس لئے یہ متوازی الاضلاع آپس میں برابر ہیں  
چونکہ قطر اب متوازی الاضلاع ج ب س کے دو برابر حصے کرتا ہے شکل ۳۲  
اس لئے مثلث اب س متوازی الاضلاع ج ب س کا آدھا ہے  
اور چونکہ قطر د ف متوازی الاضلاع دی ف ہ کے دو برابر حصے کرتا ہے شکل ۳۲  
اس لئے مثلث دی ف متوازی الاضلاع دی ف ہ کا آدھا ہے

علوم متعارفہ

لیکن برابر چیزوں کے آدھے آپس میں برابر ہوتے ہیں  
اس لئے مثلث اب س برابر ہی مثلث دی ف کے  
اس لئے جو مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہیں یہی ثابت کرتا تھا  
اس شکل کی یہ صورت کہ برابر قاعدوں پر کے مثلثوں کی راسیں ایک ہی نقطہ پر ہیں بری کارآمد ہے  
اس شکل میں یہ بات مان لی گئی ہے کہ دونوں مثلثوں کے قاعدے ایک ہی سیدھے میں  
ہیں اگر شکل میں نقطہ ی نقطہ س پر اور نقطہ د نقطہ ہ پر ہو تو ایک مثلث کا زاویہ دوسرے  
کے زاویہ کا قتمہ ہو گا اس لئے بہ نتیجہ ثابت ہوا کہ اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے  
دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہیں اور ان ضلعوں سے بنے ہوئے زاویے ایک دوسرے  
کا قتمہ ہیں تو دونوں مثلثوں کے رقبے آپس میں برابر ہیں

سیٹیوئل اور اڑتیسویں شکل کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں - مثلث جو ایک ہی قاعدہ

یا برابر قاعدوں پر ہوتے ہیں اور جنکی اوچائیاں برابر ہوتی ہیں آپس میں برابر ہوتے ہیں  
 نتیجہ صریح خط مستقیم جو کسی مثلث کے قاعدہ کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے اس کے سامنے  
 کے زاویہ تک کھینچا گیا ہو وہ مثلث کے دو برابر حصے کرتا ہے  
 منق

۱ سطح متوازی الاضلاع جن چار مثلثوں میں اپنے قطروں سے تقسیم ہوتی ہیں ان مثلثوں کے  
 رقبے آپس میں برابر ہوں گے

۲ اب س د متوازی الاضلاع ہیں اور اسکے قطب د کے کسی نقطہ ع سے خط مستقیم  
 ع ا اور ع س کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ع اب اور ع س ب آپس میں برابر ہوں گے

۳ اب س ایک مثلث ہے اور د اور ی ضلعوں اب اور اس کے بیچوں بیچ کے نقطہ  
 ہیں خط ب ی اور س د نقطہ فیہ ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ب ی  
 برابر ذواربۃ الاضلاع ا د ی کے ہیں

۴ ی اور د مثلث اب س کے ضلعوں اب اور اس کے بیچوں بیچ کے نقطہ ہیں  
 اور ا قاعدہ ب س پر عمود ہیں ثابت کرو کہ زاویہ ی د ف برابر زاویہ ب ا س کے ہیں اور  
 ذواربۃ الاضلاع ا ی د ف مثلث اب س کی آدھی ہے

۵ ایک ہی قاعدہ پر اور اس کے آٹنے سامنے کی طرفوں میں دو برابر قبوں کے مثلث واقع  
 ہیں تو ثابت کرو کہ قاعدہ یوں ہی یا بڑھ کر ان مثلثوں کی راسوں کے ملانے والے خط کو دو  
 برابر حصوں میں کاٹتا ہے

۶ تین متوازی الاضلاع جو سب طرح سے آپس میں برابر ہیں اس طرح سے پاس پاس  
 ملا کر رکھی گئی ہیں کہ ان کے قاعدے ایک ہی خط مستقیم میں ہیں پہلی متوازی الاضلاع کے قاعدہ  
 کے اوپر تیسری متوازی الاضلاع کے قاعدہ کے سامنے کے ضلع کے ایک ایک طرف کے  
 سرے ملائے گئے ہیں ثابت کرو کہ یہ تہی سطح متوازی الاضلاع جو سبوں کے ملانے سے

بنی ہی اسکا وہ حصہ جو دوسری سطح متوازی الاضلاع کے درمیان ہی ہر ایک سطح متوازی الاضلاع سے آدھا ہے

۷ کسی مثلث کے ایک ضلع میں کوئی نقطہ دیا ہو اسی اس نقطہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ مثلث کے دو برابر حصے کرے

۸ کسی وہی چوٹی ذواربغۃ الاضلاع کے زاویہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ ذواربغۃ الاضلاع کو آدھا آدھا کر دے

۹ اگر ایسا مثلث بنایا جائے کہ اس کے دو ضلع کسی ذواربغۃ الاضلاع کے قطروں کے ایک ایک برابر ہوں اور ان ضلعوں کے درمیان کا زاویہ قطروں کے درمیان کے کسی زاویہ کے برابر ہو تو اس مثلث کا رقبہ اس ذواربغۃ الاضلاع کے رقبہ کی برابر ہوگا

### شکل ۳۹ اثباتی

جو برابر مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور اس کے ایک ہی طرف میں ہوں وہ ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوتے ہیں

فرض کرو کہ برابر مثلث اب س اور د ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور اس کے ایک ہی طرف میں ہیں

تو مثلث اب س اور د ب س ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں گے

اد ملاؤ۔ تو ا د متوازی ب س کا ہوگا

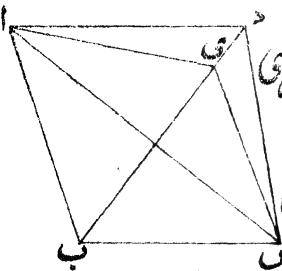
اگر ا د متوازی ب س کا نہ ہو

ممكن ہو تو نقطہ اسے ای متوازی ب س کا اور ب د یا ب د کے بر

ہوئے حصہ کو ہی پر کاٹا ہوا کھینچو

اوری س ملاؤ

شکل ۳۱



چونکہ مثلث اب س اور ی ب س ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی  
خطوں کے درمیان ہیں

۱۔ اسلئے مثلث اب س برابر ہی مثلث ی ب س کے

لیکن مثلث اب س مثلث دب س کے برابر ہی

۲۔ اسلئے مثلث دب س برابر ہی مثلث ی ب س کے

یعنی ہر مثلث برابر ہی چھوٹے مثلث کے اور یہ ناممکن ہی

۳۔ اسلئے ای متوازی ب س کا نہیں ہی

اور ایسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہی کہ کوئی خط مستقیم سوائے اد کے متوازی

ب س کا نہیں کھج سکتا

۴۔ اسلئے اد متوازی ب س کا ہی

۵۔ اسلئے جو برابر مثلث ایک ہی قاعدہ پر الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

یہ شکل سیتھوین شکل کا عکس ہی

مشق

۱۔ دو خط مستقیم اب اور س د ایک دوسرے کو نقطہ ی پر کاٹتے ہیں اور مثلث ای س

برابر ہی مثلث ب ی د کے ثابت کرو اد متوازی ب س کا ہی

۲۔ خط مستقیم جو کسی مثلث کے دو ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں کو ملاتا ہی اس مثلث

کے قاعدہ کا متوازی اور آدھا ہوتا ہی

۳۔ مثلث اب س کے قاعدہ ب س میں ایک نقطہ د لو اور اد اور دس اور اب اور

ب س کو نقطوں ی اور ف اور ج اور لا پر آدھا آدھا کرو ثابت کرو کہ ی ج اور ف لا

آپس میں برابر اور متوازی ہیں

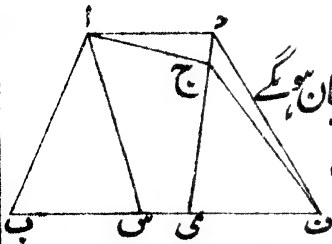
۴۔ خط مستقیم جو کسی دو ارباعہ الاضلاع کے متصل ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں کو

ملائیکے ایسی شکل متوازی الاضلاع پیدا کریں گے کہ وہ ذواربعۃ الاضلاع کی آدھی ہوگی  
 کسی مثلث کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطے دیے ہوئے ہیں اس مثلث کو بناؤ  
 اگر کسی مثلث کے ہر ایک دو ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطے ملائے جائیں تو مثلث  
 جو اس طرح بنے گا مکمل مثلث کا چوتھائی ہوگا

### شکل ۴۰ اثباتی

جو برابر مثلث برابر قاعدوں پر جو ایک ہی سیدھ میں ہیں اور ان قاعدوں  
 کے ایک ہی طرف میں واقع ہوتے ہیں وہ ایک ہی متوازی خطوں کے  
 درمیان ہوتے ہیں

فرض کرو کہ برابر مثلث اب س اور دی ف برابر قاعدوں پر  
 اوری ف پر جو ایک ہی سیدھ ب ف میں ہیں اور ان قاعدوں کے  
 ایک ہی طرف میں واقع ہیں



تو یہ مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہو گئے  
 اد ملاؤ - تو ا د متوازی ب ف کا ہوگا  
 اگر ا د متوازی ب ف کا ہو

ممكن ہو تو ا ج متوازی ب ف کا اوری دی ای د کے بڑھے ہوئے  
 حصہ کو نقطہ ج پر کاٹتا ہوا کھینچو

شکل ۳۱

اور ج ف ملاؤ

چونکہ مثلث اب س اور ج ی ف برابر قاعدوں پر ہیں اور ج ی ف  
 پر اور ایک ہی متوازی خطوں ا ج اور ب ف کے درمیان ہیں

شکل ۳۲

اس لیے مثلث اب س برابر ہوگا مثلث ج ی ف کے  
 لیکن مثلث اب س برابر ہی مثلث دی ف کے

فرض

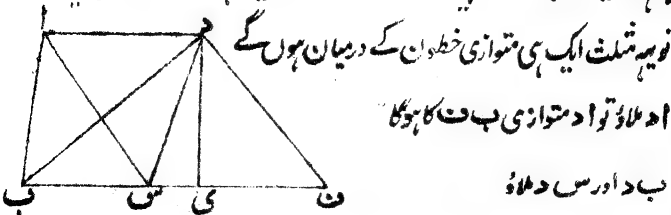


علوم متعارفہ

اسلئے مثلث دی ف برابر ہی مثلث جی ف کے  
یعنی بڑا مثلث برابر ہی چھوٹے مثلث کے  
اسلئے اج متوازی ب ف کا نہیں ہے  
اور اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ کوئی خط مستقیم سوائے ا د کے  
ب ف کا متوازی نہیں ہے

اسلئے ا د متوازی ب ف کا ہے  
اسلئے جو برابر مثلث برابر قاعدوں پر الیخ - یہی ثابت کرنا تھا  
یہ شکل اریستوین شکل کا عکس ہے اور دلیل خلف سے ثابت کی گئی ہے اسکو بغیر دلیل خلف  
کے اس طرح ثابت کرتے ہیں

فرض کرو کہ برابر مثلث اب س اور دی ف برابر قاعدوں ب س اور ی ف  
پر جو ایک ہی سیدھ ب ف میں ہیں اور ان قاعدوں کے ایک ہی طرف میں واقع ہیں



تو یہ مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں گے  
ا د ملاؤ تو ا د متوازی ب ف کا ہوگا  
ب د اور س د ملاؤ  
چونکہ مثلث د ب س اور دی ف برابر قاعدوں پر واقع ہیں اور انکی اوپائی ایک ہی ہے -  
اسلئے مثلث د ب س برابر ہی مثلث دی ف کے  
لیکن مثلث دی ف برابر ہی مثلث اب س کے  
اسلئے مثلث اب س برابر ہی مثلث د ب س کے  
اسلئے ا د متوازی ب ف کا

اسلئے جو برابر مثلث برابر قاعدوں پر الیخ - یہی ثابت کرنا تھا  
سیتیسوین اور اریستوین شکل کا دوسرا عکس " اگر برابر مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے

شکل ۳۸

فرض

علوم متعارفہ

شکل ۳۹

در بیان ہوں یا برابر او پچائی رکھتے ہوں تو وہ یا تو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر تباعدوں پر ہوگا  
ثابت کرو

اگر اس اُن سب برابر مثلثوں کے جو ایک ہی قاعدہ پر یا ایک ہی سیدھ کے  
برابر قاعدوں پر ایک ہی طرف میں واقع ہوں ملائے جائیں تو ایک خط مستقیم پیدا  
ہوگا جو اُن قاعدوں کا متوازی ہوگا اس خط مستقیم کو اُن مثلثوں کی راسوں کا مقام  
النقاط کہتے ہیں

ہندسہ سطح میں مقام النقاط وہ خط مستقیم یا خط منحنی ہے جس کا ہر ایک نقطہ ایک خاص  
شرط کو پورا کرے اور کوئی اور نقطہ اُس شرط کا پورا کرنے والا نہ ہو مثلاً سطح مستوی میں وہ مقام  
النقاط جس کا ہر نقطہ ایک دیے ہوئے نقطہ سے دی ہوئی دوری پر ہو اُس دائرہ کا محیط  
ہے جس کا مرکز دیا ہوا نقطہ ہے اور جس کا نصف قطر دی ہوئی دوری ہے اور اُن نقطوں کا جو کسی  
دو دیے ہوئے نقطوں سے برابر دوری پر ہیں مقام النقاط وہ خط مستقیم ہے جو اُن دو  
نقطوں کے ملائے ہوئے خط مستقیم کے دو برابر حصے کرتا ہے اور اُس کے ساتھ زاویے

## تائید بنا تاہی مقام النقاط کے سوال

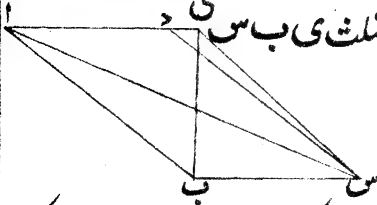
دریافت کرو مقام النقاط

- ۱ اُن نقطوں کا جو دیے ہوئے خط سے دی ہوئی دوری پر ہیں
- ۲ اُن نقطوں کا جو کسی دیے ہوئے زاویہ کی ساقوں سے برابر دوری پر ہیں
- ۳ اُن نقطوں کا جو کسی دیے ہوئے دائرہ سے برابر دوری پر ہیں
- ۴ اُن نقطوں کا جو دو دیے ہوئے خط مستقیم سے جو ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں برابر دوری پر ہیں
- ۵ اُن خط مستقیم کے پچوں بیچ کے نقطوں کا جو ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دیے ہوئے

خط مستقیم تک کھینچے گئے ہیں

## شکل ۴۱ اثباتی

اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں تو متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہوگی  
فرض کرو کہ متوازی الاضلاع اب س د اور مثلث ی ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ای کے درمیان ہوں تو متوازی الاضلاع اب س د مثلث ی ب س سے دونی ہوگی



اس ملاؤ

چونکہ مثلث اب س اور ی ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ای کے درمیان ہیں اسلئے مثلث اب س برابر ہی مثلث ی ب س کے

شکل ۴۲

لیکن متوازی الاضلاع اب س د مثلث اب س سے دونی ہی کیونکہ قطر اس اس کے دو برابر حصے کرتا ہے

شکل ۴۳

اسلئے متوازی الاضلاع اب س د مثلث ی ب س سے دونی ہی

اسلئے اگر متوازی الاضلاع اور مثلث الخ - یہی ثابت کرنا تھا

نتیجہ صریح اگر متوازی الاضلاع اور مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں تو ثابت ہو سکتا ہے کہ متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہوگی

اس شکل کے عکس "اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر یا ایک ہی سیدھے

برابر قاعدوں پر واقع ہوں اور متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہو تو متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہو گئے" اور اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک

ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں اور متوازی الاضلاع مثلث سے دونی ہو تو متوازی الاضلاع اور مثلث یا تو ایک ہی قاعدہ پر یا برابر قاعدوں پر ہو گئے " ثابت کرو یہ مثلثوں کی مساحت کی اور اسلئے سب متقیم الاضلاع کی مساحت کی (کیونکہ ہر متقیم الاضلاع کے مثلث آسانی سے بن سکتے ہیں) بنیادی ہو کہ متوازی الاضلاع کے رقبہ کو دریافت کر نیکے لئے مثلث کے قاعدہ کو اسکی چوڑائی یعنی اونچائی کے ساتھ گنا کرتے ہیں اسلئے مثلث کا رقبہ دریافت کر نیکے لئے مثلث کے قاعدہ کو اسکی اونچائی سے گنا کرو اور جو کچھ گنا کرنے سے حاصل ہوا اسکا آدھا لیں وہی مثلث کا رقبہ ہوگا

### مشق

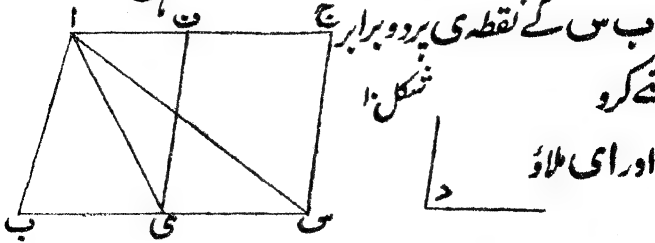
- ۱ اگر مثلث اور متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں اور مثلث کا قاعدہ متوازی الاضلاع کے قاعدہ سے دو نما ہو تو مثلث برابر ہوگا متوازی الاضلاع کے
- ۲ اب س د متوازی الاضلاع ہی اور کسی نقطہ سے جو متوازی الاضلاع کے اندر ہی متوازی الاضلاع کے زاویوں تک خط مستقیم کھینچ گئے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ا ب اور س د مکر متوازی الاضلاع کے آدھے ہیں
- ۳ متوازی الاضلاع ا ب س د کے زاویہ د ایک خط جو ب سے نقطہ ف پر اور ا ب سے نقطہ ج پر تباہی کھینچا گیا ہی ثابت کرو کہ مثلث ا ب ف اور س د ج آپس میں برابر ہیں
- ۴ اب س د ایک ذواربۃ الاضلاع ہی جسکا ضلع ا ب متوازی س د کا ہی اور ضلع ب د کے بیچوں بیچ کے نقطہ ی سے ب اور س د تک خط مستقیم کھینچ گئے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ی ب س ذواربۃ الاضلاع کا آدھا ہی

یہ دی ہوئی متوازی الاضلاع کی برابر ایک عین بناؤ

### شکل ۴۴ عملی

دیے ہوئے مثلث کی برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بناؤ کہ اسکا

ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ مستقیم اخطین کے برابر ہو  
 فرض کرو کہ اب س دیا ہوا مثلث اور دیا ہوا زاویہ مستقیم اخطین  
 اب س کی برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بنائی ہے کہ اس کا ایک زاویہ دے کے  
 ب س کے نقطہ ی پر دو برابر ج  
 حصے کرو  
 شکل ۱



ی س کے نقطہ ی پر زاویہ س ی ف برابر زاویہ دے کے بناؤ شکل ۲  
 س سے س ج متوازی ی ف کا کھینچو اور اسے ا ف ج متوازی  
 ی س کا اوری ف کو نقطہ ف پر اور س ج کو نقطہ ج پر کاٹنا ہو کھینچو  
 تو س ی ف ج متوازی الاضلاع ہے

چونکہ مثلث اب ی اور ای س برابر قاعدوں ب ی اور ی س پر  
 اور ایک ہی متوازی خطوں ب س اور ا ج کے درمیان ہیں  
 اسلئے مثلث اب ی اور ای س آپس میں برابر ہیں  
 اسلئے مثلث اب س مثلث ای س کا دو نامی

لیکن متوازی الاضلاع س ی ف ج بھی مثلث ای س کی دونی  
 ہے کیونکہ متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ ی س پر اور ایک ہی  
 متوازی خطوں ی س اور ا ج کے درمیان ہیں

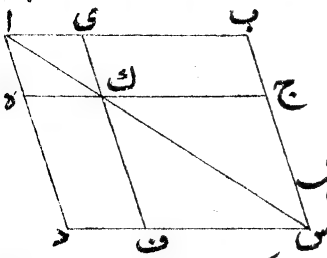
اسلئے متوازی الاضلاع س ی ف ج مثلث اب س کے برابر ہے  
 اور اس کا ایک زاویہ س ی ف دیے ہوئے زاویہ د کے برابر ہے  
 اسلئے دیے ہوئے مثلث اب س کی برابر ایسی متوازی الاضلاع

سی ف ج بن گئی کہ اسکا ایک زاویہ سی ی ف برابر دیے ہوئے  
زاویہ د کے ہے اسی متوازی الاضلاع کے بنانے کی ضرورت تھی  
جسطح دیے ہوئے مثلث کی برابر ایک متوازی الاضلاع بنائی گئی ہے جسکا ایک زاویہ  
دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہے اسی طرح ہم دیے ہوئے متوازی الاضلاع کی برابر ایسا مثلث  
بنا سکتے ہیں کہ اسکا ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ کی برابر ہو

### شکل ۴۳ اثباتی

متمم ان متوازی الاضلاعوں کے جو کسی متوازی الاضلاع کے قطع  
گرد واقع ہیں آپس میں برابر ہوتے ہیں

فرض کرو کہ اب س د متوازی الاضلاع ہے جسکا قطر اس ہے اور ی لا اور  
ج ف وہ متوازی الاضلاع ہیں جو اسکے گرد ہیں یعنی جنہیں اس ہو کر گذرتا ہے  
اور ب ک اور ک د اور متوازی الاضلاع ہیں جو شکل اب س د کو پورا



کرتی ہیں اور اسلئے جنکا نام متمم ہے  
تو متمم ب ک برابر ہوگا متمم ک د کے ج  
چونکہ اب س د متوازی الاضلاع ہے  
اور اس اسکا قطر ہے

اسلئے مثلث اب س برابر مثلث اد س کے ہے  
پھر چونکہ ای ک لا متوازی الاضلاع ہے اور اک اسکا قطر ہے  
اسلئے مثلث ای ک برابر ہے مثلث اہ ک کے  
اور اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث ک ج س برابر ہے مثلث  
ک ف س کے

اسلئے دو مثلث ای ک اور ک ج س برابر ہیں دو مثلث اہ ک

اور ک ف س کے

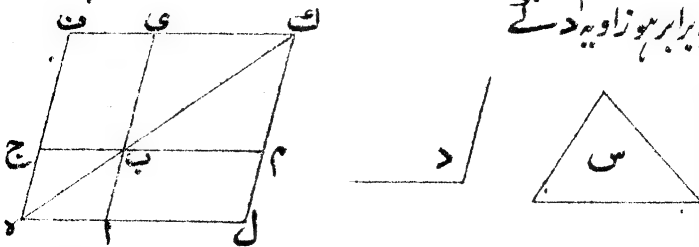
علامہ متعارفہ

لیکن کثل مثلث اب س برابر ہی کثل مثلث اد س کے  
اسلئے باقی تمام ب ک برابر ہی باقی تمام ک د کے  
اسلئے تمام ان متوازی الاضلاعوں کے الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
منش

۱ اوپر کی شکل میں ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع ب ف برابر ہی متوازی الاضلاع ک د س کے  
۲ اوپر کی شکل میں اگر قطری ک او ب د اور ج ف کھینچ جائیں تو یہ دونوں قطریں ایسی متوازی ہوں گے  
۳ متوازی الاضلاع اب س د میں نقطہ ع سے دو خط مستقیم متوازی الاضلاع کے  
ضلعوں کے متوازی کھینچ گئے ہیں اور متوازی الاضلاع ع ب اور ع د آپس میں برابر ہیں  
ثابت کرو کہ نقطہ ع قطر اس میں ہی

### شکل ۲۲ عملی

دیے ہوئے خط مستقیم پر ایک دیے ہوئے مثلث کے برابر ایسی متوازی الاضلاع  
بناؤ کہ اسکا ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ مستقیم انہیں کے برابر ہو  
فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم اور س د یا ہوا مثلث اور دیا ہوا زاویہ مستقیم انہیں کے  
خط مستقیم اب ب مثلث س کی برابر ایسی متوازی الاضلاع بنائی ہو کہ اسکا ایک  
زاویہ برابر ہو زاویہ د کے



مثلث س کے برابر ایسی متوازی الاضلاع ب ی ف ج بناؤ کہ اسکا زاویہ  
ی ب ج زاویہ د کے برابر ہو

شکل ۲۲

اور اس متوازی الاضلاع کو اس طرح رکھو کہ بی اور اب ایک ہی خط مستقیم میں ہوں  
اسے اب متوازی بج یا ایف کا کہیے

شکل ۳

ج کو کہ ایک بڑھاؤ اور ب لاٹاؤ

چونکہ خط مستقیم لاٹ دو متوازی خطوں اب اور فی ف پر گزرتا ہے  
اسلئے زاویے الاٹ اور لاٹ بی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں

شکل ۴

اس واسطے زاویے ب لاٹ اور لاٹ بی ملکر دو قائموں سے کم ہیں  
لیکن جو دو خط مستقیم ایک اور خط مستقیم کے ساتھ اسکے ایک طرف  
میں ایسے دو زاویے بناتے ہیں کہ وہ ملکر دو قائموں سے کم ہیں تو وہ دونوں  
خط مستقیم بڑھائے جانے سے ملجاتے ہیں

علوم متعارفہ ۱۱

اسلئے اب اور فی بی بڑھائے جانے سے ملجائیں گے

فرض کرو کہ وہ بڑھائے جانے سے نقطہ ک پر ملتے ہیں

شکل ۵

ک سے ک ل متوازی می ایف کا کہیے

اور لا اور ج ب کو اتنا بڑھاؤ کہ وہ ک ل سے ل اور م نقطوں پر ملیں

تو ک ل ک متوازی الاضلاع ہی جس کا قطر ک ل ہے اور متوازی الاضلاع

اج اور می قطر ک ل کے گرد ہیں اور ل ب اور ب ف آگے متمم ہیں

شکل ۶

اسلئے متمم ل ب برابر ہی متمم ب ف کے

لیکن ب ف مثلث س کے برابر بنایا گیا ہے

اسلئے ل ب مثلث س کے برابر ہے

علوم متعارفہ ۱۲

شکل ۷

اور چونکہ زاویہ ج بی زاویہ اب م کے برابر ہے

اور زاویہ ج بی برابر زاویہ د کے بنایا گیا ہے

اسلئے زاویہ اب م برابر ہی زاویہ د کے

علوم متعارفہ ۱۳

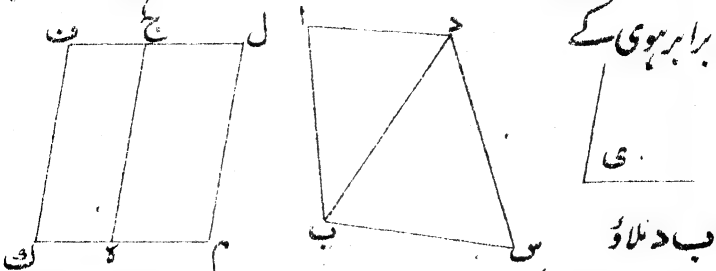


اسلئے دیے ہوئے خط مستقیم اب پر دیے ہوئے مثلث سے کے برابر  
ایسی متوازی الاضلاع ل ب بنائی کہ اسکا زاویہ ا ب م دیے ہوئے زاویہ  
د کے برابر ہو۔ اسی متوازی الاضلاع کے بنانے کی ضرورت تھی  
اس شکل میں اقلیدس نے یہ نہیں ثابت کیا ہے کہ ا ا اور ف ج میں گے یہ بات آسانی  
ثابت ہو سکتی تھی دیکھیں صاحب اس شکل کا اسطرح بنانا تجویز کرتے ہیں کہ ج ہ برابر اب کے  
بناؤ اور ا ا ملاؤ تو تیسوں شکل سے ا ا متوازی ب ج کا ہوگا  
نتیجہ صریح اس شکل سے صاف ظاہر ہے کہ اسطرح دیے ہوئے خط مستقیم پر دیے  
ہوئے مثلث کے برابر ایک قائم الزوایا بنایا جاتا ہے  
مشق

۱ دیے ہوئے خط مستقیم پر دی ہوئی متوازی الاضلاع کے برابر ایسا مثلث بناؤ کہ  
اسکا ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

### شکل ۵۴ عملی

دی ہوئی مستقیم الاضلاع کے برابر ایسی متوازی الاضلاع بناؤ کہ اسکا ایک  
زاویہ دیے ہوئے زاویہ مستقیم الخطین کے برابر ہو  
قرض کرو کہ اب سی دی ہوئی مستقیم الاضلاع اور ی یا ہوا زاویہ مستقیم الخطین ہے  
اب سی د کے برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بنانی ہے کہ اسکا ایک زاویہ



مثلث ا د ب کے برابر متوازی الاضلاع ف ہ بناؤ جسکا زاویہ ف ل ک لا

برابر زاویہ کی ہو

اور خط مستقیم ج ک پر مثلث ب د س کے برابر متوازی الاضلاع

ج م بناؤ جس کا زاویہ ج ک م برابر زاویہ ی کے ہو

تو شکل ف ک م ل متوازی الاضلاع ہوگی اور وہ برابر اب س د

کے ہوگی اور اس کا ایک زاویہ برابر زاویہ ی کے ہوگا

چونکہ زاویوں ف ک ل اور ج ک م میں سے ہر ایک زاویہ ی کے

برابر ہے

اس لئے زاویہ ف ک ل زاویہ ج ک م کے برابر ہے

ان برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ل ک ج ملاؤ

اس لئے زاویے ف ک ل اور ک ل ج برابر ہیں زاویوں ل ک ج اور ج ک م کے

لیکن زاویے ف ک ل اور ک ل ج ملکر برابر ہیں دو قائموں کے

اس لئے زاویے ل ک ج اور ج ک م بھی ملکر برابر ہیں دو قائموں کے

چونکہ خط مستقیم ج ک ل کے نقطہ ک پر دو خط مستقیم ل ک ج اور م ک ل کے

آنے سائے کی طرفوں سے آکر ایسے دو زاویے متصلہ پیدا کرتے ہیں کہ

وہ ملکر برابر دو قائموں کے ہیں

اس لئے ک ل ج اور ل ک م ایک ہی خط مستقیم ہیں

اور چونکہ خط مستقیم ج ک م دو متوازی خطوں ل ک م اور ج ک م پر گزرتا ہے

اس لئے زاویہ م ک ج برابر ہے زاویہ قبا د ل ج ک ف کے

ان برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ل ج ک ملاؤ

اس لئے زاویے م ک ج اور ل ج ک برابر ہیں زاویوں ل ج ک اور

ہاجت کے

علوم متعارفہ

لیکن زاویے م ہاج اور ل ج ل ملکر برابر دو قائموں کے ہیں شکل ۹  
اسلئے زاویے ل ج ل اور ہاج ف بھی ملکر برابر دو قائموں کے ہیں علوم متعارفہ  
اسلئے ف ج اور ج ل ایک ہی خط مستقیم میں ہیں شکل ۱۲

شکل ۱۲

اور چونکہ ف متوازی ہے ج کا اور ہاج متوازی ہے ل کا  
اسلئے ف متوازی ہے ل کا

شکل ۱۳

اور ف ل متوازی ک م کا ثابت ہو چکا ہے

حد ۱

اسلئے ف ک م ل متوازی الاضلاع ہے

اور چونکہ متوازی الاضلاع ہ ف برابر مثلث اب د کے اور متوازی الاضلاع

ج م برابر مثلث ب د س کے بنائی گئی ہے

اسلئے کل متوازی الاضلاع ک ف ل م برابر ہی کل مستقیم الاضلاع

علوم متعارفہ

اب س د کے

اسلئے دی ہوئی مستقیم الاضلاع اب س د کے برابر متوازی الاضلاع

ک ل بنگئی جسکا زاویہ ف ک م برابر دیے ہوئے زاویہ ی کے ہے۔ اسی

متوازی الاضلاع بنانے کی ضرورت تھی

نتیجہ صریح - اس شکل سے صاف ظاہر ہے کہ دیے ہوئے خط مستقیم پر دی

ہوئی مستقیم الاضلاع کے برابر ایک متوازی الاضلاع جسکا ایک زاویہ دیے

ہوئے زاویہ کے برابر ہو اس طرح بن سکتی ہے کہ پہلے دیے ہوئے خط مستقیم پر

چو الیسویں شکل کی مدد سے مثلث اب د کے برابر متوازی الاضلاع بناؤ جسکا

ایک زاویہ دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

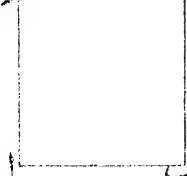
جب مستقیم الاضلاع میں چار سے زیادہ ضلع ہوں تو بھی اس مستقیم الاضلاع کے برابر متوازی

الاضلاع

## شکل ۴۶ عملی

س

د



شکل ۱

شکل ۲

شکل ۳

شکل ۴

شکل ۵

شکل ۶

دیے ہوئے خط مستقیم پر ایک مربع بناؤ

قرعہ کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم ہے

اب پر ایک مربع بنانا ہے

اسے خط مستقیم اس خط مستقیم اب کے ساتھ ہے

زاویہ قائمہ بنانا ہوا کھینچو

اد برابر اب کے بناؤ

نقطہ د سے دی متوازی اب کا اور نقطہ ب سے بی متوازی

اد کا دی سے نقطہ ی پر ملتا ہوا کھینچو

تو اب بی متوازی الاضلاع ہوئی

اور اسلئے اس کا ضلع اب برابر بی دی کے اور ضلع اد برابر بی کے

لیکن اد برابر اب کے بنایا گیا ہے

اسلئے چاروں ضلع اب اور بی اور دی اور د آپس میں برابر ہیں

اور متوازی الاضلاع اب بی د مساوی الاضلاع ہے

اس کے سب زاویے بھی قائمہ ہیں

چونکہ اد دو متوازی خطوں اب اور دی پر گزرتا ہے

اسلئے زاویے ب اد اور ا دی ملکر برابر دو قاعوں کے ہیں

لیکن زاویہ ب اد ایک قائمہ بنایا گیا ہے

اسلئے زاویہ ا دی بھی قائمہ ہے

لیکن متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں

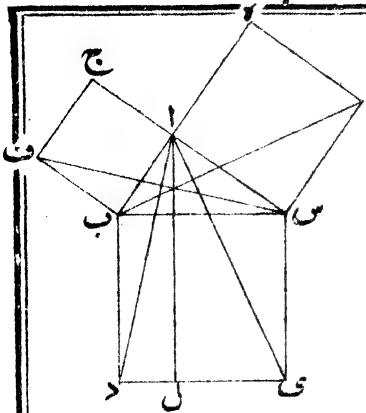
اسلئے سامنے کے زاویوں ابی اور بی دیں سے ہر ایک قائمہ ہی  
 اسلئے متوازی الاضلاع ابی د قائم الزوایا ہی  
 اور یہ ثابت ہو چکا ہے کہ وہ متساوی الاضلاع بھی ہے  
 اسلئے ابی د مربع ہی اور وہ دیے ہوئے خط مستقیم اب پر بنائی  
 اسی کے بنانے کی ضرورت تھی  
 نتیجہ صریح اس شکل کے ثبوت سے صاف ظاہر ہے کہ جس متوازی الاضلاع  
 کا ایک زاویہ قائمہ ہی اسکے سب زاویے قائمے ہیں

### مشق

۱ اگر مثلث اب س کے ضلعوں اس اور ب س پر مربع اس دی اور ب س قائم  
 بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ خط مستقیم اف اور ب د آپس میں برابر ہو گے  
 ۲ اگر مربع کے ہر ایک ضلع میں ایک ایک نقطہ زاویہ سے برابر دوری پر ترتیب دیا جائے  
 اور ان نقطوں کے درمیان ترتیب وار خط مستقیم کھینچے جائیں تو شکل جو ان خطوں سے بنائی گئی  
 ہوگی اور اس نئے مربع کا رقبہ اصل مربع کے رقبہ سے چھوٹا ہوتا جائیگا جقدر نقطوں کی دوری  
 زاویوں سے بڑھتی جائیگی بیاہنگ کہ یہ دوری اصل مربع کے ضلع کی لمبائی کی آدھی ہو اور  
 اس صورت میں نئے مربع کا رقبہ سب سے چھوٹا ہوگا

### شکل ۴۴ ثباتی

ہر مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کے سامنے کے ضلع پر جو مربع بنایا جاتا  
 وہ برابر ہوتا ہے ان مربعوں کے جو زاویہ قائمہ بنانے والے ضلعوں پر بنائے جاتے ہیں  
 فرض کرو کہ اب س مثلث قائم الزاویہ ہے جس کا زاویہ ب اس قائمہ ہے  
 تو مربع جو ضلع ب س پر بنایا جائیگا وہ برابر ہوگا ان مربعوں کے جو ضلعوں  
 ب ا اور اس پر بنائے جائیں گے



ب س پر مربع ب دی س  
اور ب ا اور اس پر مربع ج ب اور ک  
ا س بناؤ  
اسے ال متوازی ب دی ای س

سما کھیچو

اور ا د اور ف س ملاؤ

چونکہ زاویہ ب ا س قائمہ ہی (فرض) اور زاویہ ب ا ج قائمہ ہی  
دو خط مستقیم اس اور ا ج خط مستقیم اب کی آٹھ سائے کی طرفوں سے  
اگر نقطہ ا پر ملتے ہیں اور ا س خط کے ساتھ ا س نقطہ پر زاویے متصلہ برابر دو قائمہ  
کے بناتے ہیں

شکل ۱۲

اسلئے س ا اور ا ج ایک ہی خط مستقیم ہیں  
اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ب ا اور ا د ایک ہی خط مستقیم ہیں  
چونکہ زاویہ د ب س برابر ہی زاویہ ف ب ا کے کیونکہ ہر ایک انیس سے قائمہ ہی  
ان برابروں میں سے ہر ایک میں زاویہ ا ب س ملاؤ

علوم متوازنہ

اسلئے کل زاویہ د ب ا برابر ہی کل زاویہ ف ب س کے  
چونکہ مثلث ا ب د اور ف ب س میں دو مثلے ا ب د اور ب د ا لگ

۳۰۵

برابر ہیں دو ضلعوں ف ب ا اور ب س کے

اور زاویہ ا ب د برابر زاویہ ف ب س کے ہی

شکل

اسلئے مثلث ا ب د برابر مثلث ف ب س کے ہی

اب متوازی الاضلاع ب ل مثلث ا ب د سے دو فی ہی کیونکہ متوازی الاضلاع

اور مثلث ایک ہی قاعدہ ب د پر اور ایک ہی متوازی خطوں ب د اور ا ل کے

شکل ۱۱

در بیان واقع ہیں

اور مربع ج ب مثلث ف ب س سے دونوں کیوں کہ مربع اور مثلث ایک ہی قاعدہ ف ب پر اور ایک ہی متوازی خطوں ف ب اور ج ا کے درمیان واقع ہیں

شکل ۱۲

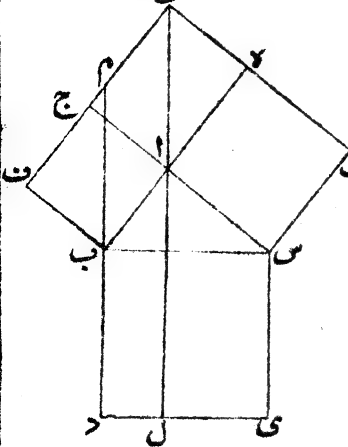
لیکن جو چیزیں برابر چیزوں کی دونی ہوتی ہیں آپس میں برابر ہوتی ہیں علو متوازی  
اس لئے متوازی الاضلاع ب ل مربع ج ب کے برابر ہی  
اسی طرح ای اور ب ل ملائے سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ متوازی الاضلاع  
س ل مربع د س کے برابر ہی

اس لئے کل مربع ب د ی س برابر ہی دو مربعوں ج ب اور د س کے متوازی  
اور مربع ب د ی س ضلع ب س پر بنایا گیا ہے اور مربع ج ب اور د س  
ضلعوں اب اور اس پر بنائے گئے ہیں

اس لئے ہر مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کے سامنے کے الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
اس شکل کی تقلید سے صرف ایک صورت بنائی ہے لیکن اسکی بہت آٹھ صورتیں بن سکتی ہیں  
۱ تینوں مربع بی اور ج ب اور س د مثلث اب س کے باہر کی طرف بنائے جائیں  
۲ تینوں مربع بی اور ج ب اور س د مثلث اب س کے بھتر کی طرف بنائے جائیں  
۳ مربع بی بھتر کی طرف بنایا جائے اور مربع ج ب اور س د باہر کی طرف بنائے جائیں  
۴ مربع بی باہر کی طرف بنایا جائے اور مربع ج ب اور س د بھتر کی طرف بنائے جائیں  
۵ مربع ج ب بھتر کی طرف بنایا جائے اور مربع بی اور س د باہر کی طرف بنائے جائیں  
۶ مربع ج ب باہر کی طرف بنایا جائے اور مربع بی اور س د بھتر کی طرف بنائے جائیں  
۷ مربع س د بھتر کی طرف بنایا جائے اور مربع ج ب اور بی باہر کی طرف بنائے جائیں  
۸ مربع س د باہر کی طرف بنایا جائے اور مربع ج ب اور بی بھتر کی طرف بنائے جائیں

ان سب صورتوں میں اقدیس کا ثبوت لگ سکتا ہے صرف اتنا یاد رکھنا چاہئے کہ انیس سے بعض صورتوں میں مثلثوں اب د اور ب ف سے یا مثلثوں اسی اور ک سے ب کی برابری بجائے اس مقالہ کی جو تھی شکل کے اُس نتیجہ کی مدد سے جو ہم نے اڑیسویں شکل کی شرح میں لکھا ہے ثابت ہوتی ہے

یہ شکل چھتیسویں شکل کی دوسری مشق کی ایک خاص صورت ہے اور اس طرح بھی ثابت ہوتی ہے فرقن کرو کہ اب سے مثلث قائم الزاویہ ہے جس کا زاویہ ب اس قائمہ ہے تو مربع جو ب سے پر بنایا جائے گا برابر ہوگا اُن مربعوں کے جو ب ا اور اس پر بنائے جائیں گے



ب سے پر مربع ب دی سے اور ب ا

اور اس پر مربع ب ف ج اور س ک ا بناؤ

چونکہ زاویہ ب ا س اور س ا د قائمہ

ہیں اسلئے ب ا اور ا د ایک خط مستقیم

ہیں

اور اسی دلیل سے س ا اور ا ج ایک

خط مستقیم ہیں

ف ج اور ک ا کو بڑھاؤ کہ وہ نقطہ ن پر ایک دوسرے سے ملیں

ن ا ط اؤ اور ا س کو بڑھاؤ کہ وہ دی سے نقطہ ل پر ملے

د ب کو بڑھاؤ کہ وہ ف ن سے نقطہ م پر ملے

چونکہ زاویہ م ب س برابر ہے زاویہ ف ب ا کے کیونکہ ہر ایک ان میں سے قائمہ

علوم متعارفہ ۱۱

ہے

اور م ب ا ن دونوں برابر ہیں مشترک ہے

اسلئے زاویہ ف ب م برابر ہے زاویہ ا ب س کے

علوم متعارفہ ۱۲



اور زاویے م ف ب اور ب ا س بھی آپس میں برابر ہیں کیونکہ انہیں سے ہر ایک قائم ہے

اس لئے مثلث ب ف م اور ب ا س میں دو زاویے م ف ب م اور ب ف م الگ الگ برابر ہیں دو زاویوں اب س اور ب ا س کے اور ضلع ف ب برابر ہے

صنلح اب کے

اس لئے ضلع ف م برابر ہے ضلع ا س کے اور ضلع ب م برابر ضلع ب س کے شکل ۱

چونکہ ن متوازی ہے ب کا اور ج سے متوازی ن کا

اس لئے ج لا متوازی الاضلاع ہے

اور ج ن برابر ہے ا کے

لیکن ا د برابر ہے ا س کے

اس لئے ج ن برابر ہے ا س کے

لیکن ف م برابر ا س کے ثابت ہو چکا ہے

اس لئے ج ن برابر ہے ف م کے

ان دونوں برابروں میں سے م ج نکال ڈالو

اس لئے باقی م ن برابر ہے باقی ف ج کے

لیکن ف ج برابر ہے ا ب کے

اس لئے م ن برابر ہے ا ب کے

اور م ن متوازی بھی ہے ا ب کا

اس لئے ب م اور ا ن آپس میں برابر اور متوازی ہیں

اور شکل م ب ا ن متوازی الاضلاع ہے

چونکہ متوازی الاضلاع م ب ا ن اور مربع ب ج ایک ہی قاعدہ ب ا پر اور

ح ۱

شکل ۱

ح ۲

علوم متعارفہ ۱

علوم متعارفہ ۲

علوم متعارفہ ۳

علوم متعارفہ ۴

علوم متعارفہ ۵

ح ۳

علوم متعارفہ ۶

ح ۴

شکل ۲

ایک ہی متوازی خطوں و ن اور ب ا کے درمیان ہیں

اسلئے متوازی الاضلاع م ب ان برابر ہی ملے ج کے

لیکن متوازی الاضلاع م ب ا برابر ہی متوازی الاضلاع ب ل کے کیونکہ یہ  
متوازی الاضلاع برابر قاعدوں م ب اور ب د پر اور ایک ہی متوازی خطوں م د اور ب ل

کے درمیان ہیں

اس لئے متوازی الاضلاع بال برابر ہوتے ہیں

اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ متوازی الاضلاع سے لے کر ہر چاروں کے

اسیے کل میچ بی برابر میچوں بج اور س کے علوم متعارف

لیکن مربع ب ی مثلث ب ا س کے ضلع ب س پر بنا یا گیا ہے اور مربع ب ج اور

سہ مشلتب اس کے ضلعوں ب اور اس پر بنائے گئے ہیں

اسلئے ہر مثلث قائم الزاویہ میں راویہ قائم کمر سامنے کے ضلع پر جو مربع الخ - تہی ثابت کیا

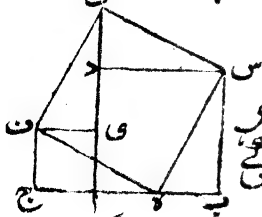
ابن شہر آشوب کا ایجاد کردہ المائیکہ فیثاغورس مشہور ہے۔ ہندوؤں نے اس شکل کو طح

طرح سے ثابت کیا جائے گا کہ ہوا بھی ایک نہایت عمدہ ثبوت ہے

فرض کرو کہ اب س اور ای ف ج دو ملے ہیں اور وہ اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے

قاعدے ایک ہی خط مستقیم میں ہیں ج لاوری ای میں سے ہر ایک کو برابر اب کے بناؤ

اس اور سب اور کاف اور ف اور ن اور م



تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث  $LAB$  سے  $BA$  پر

ثالثی کے اور ثلث و ج ۸ برابر ثلث کی دسی

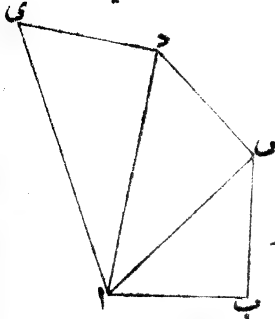
اس لئے روح اب اس د اور امی ت ج مکر قبیہ میں بلبر میں شکل سے نکلتا ہے کہ یہ بھی اس

مقادیر بنیہ میں شکل سے ثابت ہو سکتا ہے کہ شکل میں ایک فٹ لا بیلج ہی اور ضلع میں ہا اُس

شلت قائم الراویہ کا وترسی جسکے ضلعے سب اوپ لادیے ہوئے مربعوں ضلعوں برابر

اس ثبوت میں متبیین شکل کے اگے کی شکلوں میں سے کسی شکل کا کام نہیں پڑتا ہے اور اس سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ ہم دو مربعوں کو کوسطیح کرتیں کہ انکے سب کمرے ملکر تیسرا مربع بن جائیں

ہم اس شکل کی مدد سے A اور B اور C وغیرہ گزرنے کی لمبائی دریافت کر سکتے ہیں



اب برابر ایک گز کے کو اور ب سے خط ا ب کے

ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہوا اور اسکے برابر کھینچو اور اس ملاؤ

اور س د برابر ایک گز کے اور اس کے ساتھ زاویہ قائمہ

بناتا ہوا کھینچو اور ا د ملاؤ اور د ی برابر ایک گز کے اور

ا د کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو اور ای ملاؤ

تو سینتالیسویں شکل سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اب برابر ہی آگئے اور اس برابر آگئے

اور ا د برابر آگئے اور ای برابر آگئے

### مشق

۱ سینتالیسویں شکل میں اگر ج کا اور د اور ک ی ملائے جائیں تو ثابت کرو کہ

ج کا اور د ب د اور ک س ی میں سے ہر ایک برابر ہی مثلث ب اس کے

۲ کسی دو یا زیادہ دیے ہوئے مربعوں کی برابر ایک مربع بناؤ

۳ ایک ایسا مربع بناؤ کہ وہ دو دیے ہوئے مربعوں کے فرق کی برابر ہو

۴ مثلث اب س کے زاویہ میں سے اسکے سامنے کے ضلع اب پر عمود س د گرایا

کیا ہی ثابت کرو کہ ان مربعوں کا فرق جو اس اور ب س پر بنائے جائیں گے برابر ہو گا

ان مربعوں کے فرق کے جو ا د اور ب د پر بنائے جائیں گے اور وہ مربع جو اس اور ب س پر

بنائے جائیں گے ملکر برابر ہوں گے ان مربعوں کے جو ب س اور ا د پر بنائے جائیں گے

۵ ہر مثلث میں زاویہ حادہ بنانے والے مثلثوں پر کے مربع ملکر اس زاویہ کے سامنے کے

ضلع پر کے مربع سے بڑے ہوں گے

۶ ہر مثلث میں زاویہ منفرج بنانے والے ضلعوں پر کے مربع ملکر اس زاویہ کے سامنے کے ضلع پر کے مربع سے کم ہوں گے

۷ اگر مثلث کے دو ضلعوں پر کے مربع ملکر تیسرے ضلع پر کے مربع سے بڑے ہوں تو تیسرے ضلع کے سامنے کا زاویہ حادہ ہوگا اور اگر کم ہوں تو زاویہ منفرج ہوگا

۸ ب اس ایک مثلث قائم الزاویہ میں جس کا زاویہ قائمہ ہی کوئی خط مستقیم دی ضلعوں اب اور اس کو داری نقطوں پر کاٹتا ہے تو ثابت کرو کہ ب سی اور سی د پر کے مربع ملکر ب سی اور سی د پر کے مربعوں کے برابر ہوں گے

۹ اگر کسی قطعہ سے کسی مستطیل اب سی د کے زاویوں تک خط مستقیم کھینچے جائیں تو ع اور ع سی پر کے مربع ملکر ع ب اور ع د پر کے مربعوں کے برابر ہوں گے

۱۰ اگر مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کی ساقیں ایسی ہوں کہ ایک ساق پر کا مربع دوسری ساق پر کے مربع کا ٹکڑا ہو اور زاویہ قائمہ سے دو ایسے خط مستقیم کھینچے جائیں کہ انہیں سے ایک زاویہ قائمہ کے سامنے کے ضلع پر عود ہو اور دوسرا اس ضلع کے دوبرابر حصے کرتا ہو تو ثابت کرو کہ یہ خط زاویہ قائمہ کے تین برابر حصے کریں گے

۱۱ اب سی مثلث قائم الزاویہ میں جس کا زاویہ قائمہ ہی اور زاویوں ب اور سی سے ضلعوں اس اور اب کے چوں چ کے نقطوں داری تک خط مستقیم کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ بی اور سی پر کے مربعوں کا چوگنا برابر ہوگا ب سی پر کے مربع کے چھگنے کے

۱۲ کسی مثلث قائم الزاویہ کے وتر ب سی اور ضلعوں اب اور اس پر مربع ب دی سی اور ات اور اج بنائے گئے ہیں ثابت کرو کہ داری ج پر کے مربع ملکر ب سی پر کے مربع کے چھگنے ہوں گے

### شکل ۱۴ اثباتی

اگر مثلث کے ضلعوں میں سے ایک ضلع پر کا مربع باقی دو ضلعوں پر کے

مربعوں کے برابر ہو تو زاویہ جو ان دو ضلعوں سے بنا ہی قائمہ ہوگا  
 فرض کرو کہ مربع جو مثلث اب س کے ضلع ب س پر بنایا جائے برابر  
 ہی ان مربعوں کے جو ضلعوں اب اور اس پر بنائے جائیں  
 تو زاویہ ب اس قائمہ ہوگا

نقطہ اسے ا د ضلع اس کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہوا لکھیجی شکل ۱  
 ا د برابر اب کے بناؤ شکل ۲  
 اور س د ملاؤ

چونکہ ا د برابر ہی اب کے س  
 اسلئے ا د پر کا مربع برابر ہی اب پر کے مربع کے

ان برابروں میں سے ہر ایک میں اس پر کا مربع ملاؤ  
 اسلئے ا د اور اس پر کے مربع ملکر برابر ہی اب اور اس پر کے مربعوں کے علوم متعارفہ ۳

لیکن ا د اور اس پر کے مربع ملکر برابر ہی د س پر کے مربع کے کیونکہ زاویہ شکل ۴  
 د اس قائمہ ہی

اور اب اور اس پر کے مربع ملکر برابر ہی ب س پر کے مربع کے فرض علوم متعارفہ ۱  
 اسلئے د س پر مربع برابر ہی ب س پر کے مربع کے

اسلئے د س برابر ہی ب س کے  
 چونکہ ضلع ا د برابر ہی ضلع اب کے اور اس د نوں مثلثوں د اس  
 اور ب اس میں مشترک ہی

اسلئے دو ضلع د ا اور اس الگ الگ برابر ہیں دو ضلعوں ب ا اور  
 اس کے اور قاعدہ د س برابر ہی اس کے ثابت ہو چکا ہے شکل ۵  
 اسلئے زاویہ د اس برابر ہی زاویہ ب اس کے

لیکن زاویہ د اس قائمہ بنایا گیا ہے

اس لئے زاویہ ب اس قائمہ ہے

علوم متعارفہ

اس لئے اگر مثلث کے ضلعوں میں سے ایک ضلع پر جو مربع الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یہ پہل سیتا لیسویں شکل کا عکس ہے پہلے مقالہ میں اسی عکس کو اقلیدس نے ثبوت مثبتہ سے

ثابت کیا ہے اس شکل کے ثابت کرنے میں اقلیدس نے چھیا لیسویں شکل کے اس نتیجہ کو کہ برابر

خطوں کے مربع آپس میں برابر ہوتے ہیں اور اس کے عکس کو مان لیا ہے

پہلے مقالہ میں اقلیدس نے خطوں اور زاویوں اور بیڑوں کے بنانے کے طریقے اور مثلث کے

ضلعوں اور زاویوں کے آپس کے عاتقے بیان کئے ہیں اور مثلثوں اور متوازی الاضلاعوں کا

مقابلہ اس طرح کیا ہے جس سے اُنکا آپس میں برابر یا برابر ہونا معلوم ہوتا ہے مہندسوں نے اس مقالہ

کے تین حصے کئے ہیں پہلے حصہ میں پہلی چھبیس شکلیں ہیں جن میں خطوں اور زاویوں اور مثلثوں کا بنانا

دکھایا گیا ہے اور مثلث کی خاصیتیں بیان کی گئی ہیں دوسرے حصہ میں ستائیسویں شکل سے

چوتیسویں شکل تک ہیں اور ان میں متوازی خطوں کی خاصیتوں کا بیان ہے تیسرے حصہ میں

بسیں تیسویں شکل سے اٹار لیسویں شکل تک ہیں خاص اور مثلثوں اور متوازی الاضلاعوں کے

بقیہ کی برابری یا برابر دیکھانے کے لئے ایک دوسرے کا مقابلہ کیا گیا ہے۔ اقلیدس پر لوگ

بہ اعتراض کرتے ہیں کہ اُسے شکلوں کی ترتیب مضمون کے مطابق نہیں دی ہے اس اعتراض کے

دور کرنے کے لئے ہم نے اپنی کتاب کے آخر میں ایک فہرست لکھی ہے جس سے ہر مضمون کی کُل

شکلیں ترتیب اور مواد و صاف نظر پڑتی ہیں

## تخلیل اور ترکیب

کسی دویا زیادہ چیزوں کے بنانے اور اُن سے ایک نئی چیز بنانے کو ترکیب کہتے ہیں مثلاً

زر و اور نیلا رنگ ملا کر ہم سبز رنگ پیدا کرتے ہیں اگر سبز رنگ میں سے زر و اور نیلا رنگ جدا

جدا کر دیں تو اس جدا کر کے کو تخلیل کہتے ہیں عام معنی تخلیل اور ترکیب کے وہ ہیں جو اوپر بیان ہوئے

لیکن خاص معنی آنکے علم ہند میں یہ ہیں ترکیب سے یہ مراد ہی کہ ہم ان اصول اور قیوں سے شروع کریں جو ایک ثابت ہو چکے ہیں یعنی جنکا صحیح اور ممکن یا غلط اور ناممکن ہونا معلوم ہو اور آخر میں اُن سے ایک نیا نتیجہ نکالیں مثلاً ان اثباتی یا عملی شکلوں کی مدد سے جنکو ہم ثابت کر چکے ہیں یا جنکا بنانا جانتے ہیں ایک نئی شکل اثباتی ثابت کریں یا مشکل عملی بناویں اور تحلیل سے یہ مراد ہی کہ کسی نئی شکل کے ثابت کرنے یا بنانے کے لئے ہم اس بات کو پہلے فرض کر لیں کہ وہ شکل ثابت ہوگئی یا نیکی اور پھر سلسلہ وار دلیلوں کی مدد سے اُس فرض کی ہوئی شکل سے نئے نتیجے نکالیں اور دیکھیں کہ یہ نتیجہ ان قیوں میں سے کسی کے مطابق ہیں یا نہیں جو ایک ثابت ہو چکے ہیں اور اس طرح اپنی فرض کی ہوئی شکل کا صحیح اور ممکن یا غلط اور ناممکن ہونا دریافت کریں۔ اقلیدس نے محل شکلیں ترکیب کے ذریعہ سے ثابت کی ہیں یا بنائی ہیں لیکن تحلیل کا ذکر کہیں نہیں کیا ہے جسکی مدد سے پرانے زمانہ کے ہندوؤں نے بہت سی اثباتی اور عملی شکلیں دریافت کی ہیں چونکہ تحلیل کا طریقہ ہندوؤں کی شکلوں کا ثبوت یا عمل دریافت کرنے کے لئے بڑا مفید اور کارآمد ہے اسلئے ہم اس کے قاعدے اور مثالیں نیچے لکھتے ہیں

تحلیل سے کسی اثباتی شکل کا ثبوت دریافت کرلے کا قاعدہ

فرض کر لو کہ جو شکل ہمیں ثابت کرنی ہے اسکا دعویٰ صحیح ہے

پھر دیکھو کہ اُس دعویٰ کو صحیح فرض کر لینے سے کیا کیا نتیجے نکلتے ہیں

اس کے بعد دریافت کرو کہ یہ نتیجے ان قیوں میں سے کسی کے مطابق ہیں یا نہیں جنکا تم صحیح

یا غلط ہونا ایک ثابت کر چکے ہو

اگر ان میں سے کوئی نتیجہ اُس نتیجہ کے مطابق ہے جسکو تم غلط ثابت کر چکے ہو تو شکل کا

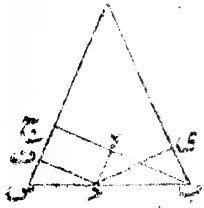
دعویٰ بھی جسکو تم نے صحیح فرض کیا تھا غلط ہے

اگر یہ نتیجہ تمہارے ثابت کئے ہوئے قیوں میں سے کسی کے مطابق نہیں ہیں تو ان

قیوں سے اور نئے نئے نتیجے نکالتے جاؤ جب تک وہ نئے نتیجے اُن کے مطابق ہوں جنکا تم صحیح

غلط ہونا جانتے ہو

شکل انتہائی - اگر مثلث متساوی الساقین اب اس کے قاعدہ ب میں سے کسی نقطہ سے عمودی اور دونوں ضلعوں اب اور اس پر گرائے جائیں تو یہ دونوں عمود ملکر برابر ہوں گے اس عمود کے جو قاعدہ ب میں بر کے کسی زاویہ سے اس کے سامنے کے ضلع پر گرایا جائیگا



تجلیس - فرض کرو کہ مثلث کا دعویٰ ہمیں ثابت کرنا ہی صحیح ہے یعنی عمودی اور دونوں ملکر برابر ہیں عمود ب ج کے جو زاویہ اب میں سے ضلع اس پر گرایا جائیگا

دعویٰ کے فرض کر لینے سے اب ایک یہ بیجو نکلا کہ جب ب ج کا کوئی صحیح لا عمود دے گا برابر ہی تو دوسرا صحیح لا حضور عمود ہی کے برابر ہی کچھ اگر دے دیا گیا تو اس نتیجہ سے ایک اور نتیجہ نکلا کہ یہ جب اور لا دے ایسے دو مثلث ہیں جن کا ضلعی ہا اور ب برابر ہیں اور ضلع ب و دونوں مثلثوں میں مشترک ہی اور زاویے ب ج اب اور ب د قاعدہ کے برابر زاویوں اب میں اس کے متعلق ہے ہونے کے سبب آپس میں برابر ہیں اور اس کے پہلے قاعدہ کی جو توجہی شکل سے مثلث برابر ہیں اور زاویہ دہا برابر قائمہ ہی کے برابر ہیں اور اس کے قاعدہ ہی کے برابر ہیں اس کے اٹھا دینے سے شکل دہا میں آپس میں متساوی ہیں اب ہم اس نتیجہ سے شکل کو درست طریقہ سے اس طرح ثابت کرتے ہیں ترکیب - نقطہ سے دہا متوازی میں اکا کھیچو

جو کردہ ج وقت متوازی الاضلاع ہی کے مثلث دہا برابر ہو ج کے شکل ۳۳ جو کہ زاویہ ب دہا جو آپس میں شکل سے زاویہ قاعدہ میں ج جب کے برابر ہیں اور اس کے

متساوی

اس کے زاویہ ب دہا زاویہ قائمہ ہی میں کے برابر ہیں

اور زاویہ دہا جب اور ہی میں آپس میں برابر ہیں کیونکہ ان میں سے ہر ایک مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ پر کے زاویہ کا نامی قائمہ ہی



اب چونکہ مثلث د ب اوری د ب میں ایک مثلث کے دو زاویے د ہ ب اور د ب د دوسرے مثلث کے دو زاویوں ب ی د اوری د ب کے الگ الگ برابر ہیں اور ضلع ب د دونوں مثلثوں میں مشترک ہے

شکل ۲۶

اسلئے ضلع ب د برابر ہی ضلع د ی کے

لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ ج د برابر ہی د ف کے

اسلئے د ہ اور د ف ملکر برابر ہیں ب ج کے۔ یہی ثابت کرنا تھا

تحلیل سے کسی عملی شکل کا عمل دریافت کرنے کا قاعدہ

۱ یاد رکھو کہ اکثر ایسا ہوتا ہے کہ دی ہوئی عملی شکل کا بنانا کئی یا اثباتی یا عملی شکلوں پر موقوف

ہوتا ہے اور یہ اثباتی اور عملی تنکیلیں اقلیدس کی کسی اثباتی یا عملی شکل پر موقوف ہوتی ہیں

۲ جس عملی شکل کو ہمیں بنانا ہو اسکو کھینچ لو اور فرض کرو کہ وہ دعویٰ کے مطابق کھینچی اور تنگی

۳ پھر اس کھینچی ہوئی شکل کے خطوط اور زاویوں وغیرہ کے آپس کے علاقے دریافت کرو اور

دیکھو کہ یہ دریافت کئے ہوئے علاقے اقلیدس کی کسی عملی یا اثباتی شکل کے مطابق ہیں یا نہیں

۴ اگر یہ علاقے تم نہ دریافت کر سکو تو اس کھینچی ہوئی شکل میں اور خط متوازی یا عمود کھینچو

یا نقطوں کو ملاؤ اور اگر ضرورت پڑے تو دائرے سے بھی کھینچو اور اسکے بعد دریافت کرو کہ

ان خطوط کے یا زاویوں کے جو ان خطوط سے بنتے ہیں اور دائروں کے آپس کے علاقے

کیا ہیں یا یہ نئے خط اور زاویے وغیرہ پہلے خطوط اور زاویوں وغیرہ سے کیا علاقے رکھتے

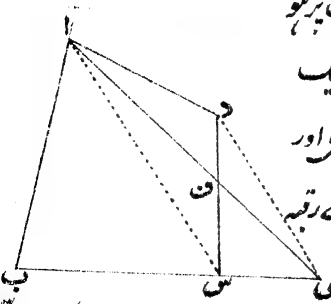
ہیں اور پھر دیکھو کہ وہ علاقے اقلیدس کی کسی عملی یا اثباتی شکل میں پائے جاتے ہیں یا نہیں یا اس سے

پیدا ہوتے ہیں یا نہیں

۵ اگر اس کوشش سے بھی تمہارا مطلب نہ نکلے تو بہت سمجھو کہ ہماری محنت بیجا نہ ہوئی

یاد رکھو کہ اکثر ایسا ہوتا ہے کہ اس کوشش سے اور نئی نئی عملی اور اثباتی تنکیلیں دریافت ہوجاتی ہیں

شکل عملی - ذرا بہتہ الاضلاع اب س د کے برابر ایک ایسا مثلث بناؤ جسکا ایک



ضلع اب ہو اور دوسرا ضلع ب س کی سمت پر ہو  
تخلیل۔ ایسا مثلث اب ی کھینچ لو جس کا ایک  
ضلع اب ہی اور دوسرا ضلع ب س کی سمت پر ہی اور  
فرض کر لو کہ اس مثلث کا رقبہ ذوارلقہ الاضلاع کے رقبہ  
کے برابر ہی

اب اس کھینچی ہوئی شکل سے اور مثلث اب ی کو ذوارلقہ الاضلاع کے برابر فرض کرنے سے  
یہ نتیجہ نکلا کہ مثلث ا ب د برابر ہی مثلث س ی د کے اور ان مثلثوں کے زاویے ا ب د  
اور س ی د پہلے متقابل کی بند ہوئیں شکل سے برابر ہیں لیکن یہ نتیجہ نقطہ ی کا مقام دریافت  
کرنے کے لئے کافی نہیں ہے اسلئے اس میں ملایا اس کے ملاتے ہی معلوم ہوا کہ اگر مثلث ا ب د  
دو برابر مثلثوں ا ب د اور س ی د میں سے ہر ایک میں ملا دیا جائے تو مثلث ا د س برابر ہی  
مثلث ا ی س کے اور چونکہ یہ برابر مثلث ایک ہی قاعدہ اس پر اور اسکے ایک ہی طرف ہیں  
اسلئے اگر دی ملا دیا جائے تو وہ متوازی اس کا ہوگا (شکل ۳۹) اسلئے نقطہ ی اس منجم  
پر ہی جہاں خط جو متوازی اس کا نقطہ د سے کھینچا گیا ہے ب س کے بڑے ہونے سے  
مٹا ہی اب ہم اس آخر نتیجہ سے شکل کو ترکیب کے طریقے سے اس طرح بناتے ہیں

ترکیب۔ اس ملاؤ اور د سے دی متوازی اس کا اور ب س کے بڑے ہونے سے  
نقطہ ی پر ملا ہوا کھینچو (شکل ۳۸) ای ملاؤ۔ تو مثلث اب ی ذوارلقہ الاضلاع اب ی  
کے برابر ہی اور اس کا ایک ضلع اب ہی اور دوسرا ضلع ب س کی سمت پر ہی  
چونکہ مثلث ا ی س اور ا ب ی ایک ہی قاعدہ اب ی اور ایک ہی متوازی خطوں اس کا دی کے برابر ہیں  
اسلئے مثلث ا ی س برابر ہی مثلث ا د س کے

شکل ۳۹

ان برابر مثلثوں میں سے ہر ایک میں مثلث اس ب ملاؤ  
اسلئے مثلث اب ی برابر ہی ذوارلقہ الاضلاع اب ی کے۔ اسی مثلث کے بنانے کی ضرورت تھی

# پہلے مقالہ کی مثالوں پر متفرق مشق

۱ مثلث ا ب س کے اندر ع ایک نقطہ ہے ثابت کرو کہ ع ا اور ع ب اور ع س ملکر مثلث کے ضلعوں کے مجموعے سے کم ہیں

۲ ا اور ب دو دائروں کے مرکز ہیں اور ع ا اور ب ق اس کے متوازی نصف قطر ہیں اور خط مستقیم ع ق اس کے محیطوں سے سراسر اور فی نقطوں پر تقاطع کرتا ہے ثابت کرو کہ ا س اور ب س متوازی ہیں

۳ مثلث متساوی الاضلاع کے اندر ایک نقطہ ہے اس نقطہ سے جو عمود مثلث کے ضلعوں پر گرے جائے گا وہ سب ملکر اس عمود کے برابر ہوں گے جو مثلث کے کسی زاویہ سے اس کے سامنے کے ضلع پر گر کر آیا جائے گا

۴ اگر دو اربعہ الاضلاع ا ب س د کی سطح کے ذرا اس سے دو برابر حصے ہوتے ہیں تو اس سے وتر ب د کے بھی دو برابر حصے ہوں گے

۵ پہلے مقالہ کی پانچویں شکل میں اگر ساقیں قاعدہ کے نیچے کی طرف بڑھائی جانے کے بجائے اس کے اوپر کی طرف بڑھائی جائیں تو پہلے مقالہ کی تبدیلیوں کی شکل کا ثبوت پہلی ہی پانچ شکلوں سے حاصل ہو سکتا ہے

۶ دیے ہوئے خط مستقیم میں ب د یا ہوا نقطہ ہے اور ا ایک اور دیا ہوا نقطہ اس خط کے باہر ہے دیے ہوئے خط میں ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ ا ع اور ع ب ملکر ایک دی ہوئی لینائی کے برابر ہوں

۷ خط مستقیم د ی کا سراد مثلث متساوی الساقین کی ساق ا ب پر ہے اور سراسر ساق اس کے بڑھے ہوئے حصہ پر ہے اور مثلث کا قاعدہ اس خط کے دو برابر حصے کرتا ہے ثابت کرو کہ د اور ا ی ملکر ب اور اس کے برابر ہیں

۸ جن متوازی الاضلاع کے قطر برابر ہوتے ہیں انہیں معین سے بڑا ہوتا ہے

۹ دو برابر خط مستقیم اس اور ب د زاویے تلے بناتے ہوئے ایک دوسرے کو کہیں

کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ ذوار بقہ الاضلاع اب اس دآن خطوں میں سے ہر ایک پر کے برابر کی  
اوصی ہوگی۔

۱۰ دیے ہوئے مثلث میں ایسی متوازی الاضلاع بناؤ جس کے قطر ایک دوسرے کو دیے ہوئے  
نقطہ پر جو مثلث کے اندر ہی کاٹیں

۱۱ مثلث جس کا رقبہ اور دو ضلع معلوم ہیں بناؤ

۱۲ مثلث جس کا قاعدہ اور دو ضلعوں کا فرق اور قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق معلوم ہیں بناؤ

۱۳ اب اور اس دو دیے ہوئے خط مستقیم میں انہیں سے ایک میں ایسا لقطعہ دریافت کرو

کہ اگر عتی عمود ہو سکے خط پر گراویں تو اعر عتی ملکر دی ہوئی لبنائی کے برابر ہوں

۱۴ دیے ہوئے محدود خط مستقیم کو قاعدہ بنا کر ایسا مثلث بناؤ جس کے ضلعوں کا فرق معلوم  
ہی اور جس کا ایک ضلع دیے ہوئے نقطہ پر ہو کر گزرے

۱۵ مثلث اب اس کا ضلع اب ضلع اس سے بڑھائی اور خط مستقیم اد جو زاویہ اب اس

کے دو برابر حصے کرنا ہی ب اس سے نقطہ دیر ملتا ہی ثابت کرو کہ ب د برابر ہی اس د سے

۱۶ اگر مثلث کا ایک زاویہ دوسرے زاویہ کا ٹکنا ہی تو وہ مثلث دو مثلث متساوی الساقین  
میں تقسیم ہو سکتا ہی

۱۷ اگر مثلث کا ایک زاویہ دوسرے زاویہ کا دو نا ہی تو اس مثلث پر ایک ایسا مثلث

متساوی الساقین زیادہ کر سکتے ہیں کہ بہ دونوں مثلث ملکر ایک مثلث متساوی الساقین بن جائیں

۱۸ مثلث متساوی الساقین اب اس کی ساق اب کے بیچوں بیچ کا نقطہ د ہی اور ساق اب

قاعہ ب اس کے نیچے کی طرف ہی تک اتنی بڑھائی گئی ہو کہ بی برابر اب کے ہی ثابت  
کرو کہ سی سی دو نا ہی اس د سے

۱۹ اس نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو جس کی ایک دیے ہوئے نقطہ سے دوری اس کی

دوسرے دیے ہوئے نقطہ سے دوری کی دونی ہو

۱۰ خط مستقیم اب کے چوں بیچ کا نقطہ سی ہی اسی اور سی ب کو نظر بنا کر متوازی الاضلاع  
ادسی سی اور ب ف سی ج بنائے گئے ہیں اور وہ متوازی سی ف کا اور ف ہ  
متوازی سی د کا اور ج ای متوازی سی ی کا اور ی ک متوازی سی ج کا کھینچا گیا ہی ثابت  
کرو کہ ہ سی اور سی ک ایک ہی سیدھ میں ہیں

۱۱ مستطیل اب سی د کے آمنے سامنے کے زاویے اور سی بی نقطہ سی ضلع ب سی  
میں اور نقطہ ف ضلع سی دیں ہی ثابت کرو کہ مثلث ای ف کے قعر کا دونا اور وہ مستطیل  
ب کے متصل کے ضلع ب سی اور ف کے برابر ہوں مگر مستطیل اب سی د کے برابر ہوں گے  
۱۲ ایک ہی تناسب سے ہر وہ مثلث اب سی اور ب سی ہیں اور مثلث اب سی  
کا ضلع اب ضلع اب سی کے برابر ہی دائرہ جو سی اور نقطوں پر ہو کر گذرنا ہی اسکا مرکزی  
ضلع سی ابریا اسکے پڑے ہوئے حصہ پر ہی اور دائرہ جو ب اور نقطہ ف ہو کر گذرنا ہی اسکا مرکزی  
ف ضلع ب ایا اسکے پڑے ہوئے حصہ پر ہی ثابت کرو کہ ذرا پتہ الاضلاع ای ف کے دو  
ضلع مکر اسکے باقی دو ضلعوں کے برابر ہیں

۱۳ دو خط مستقیم اب اور اسی کے مقام دیے ہوئے ہیں اب میں ایسا نقطہ ع دریا  
کرو کہ اگر اس نقطہ سے اسی پر عمود گرایا جائے تو وہ عمود ع سے بقدر ایک ہی ہوگی لہذا  
چھوٹا ہو

۱۴ مستقیم مساوی الزویا کے آمنے سامنے کے ضلع متوازی ہوتے ہیں اور اسکے کوئی نئے  
متصل ضلع مکر اپنے متوازی ضلعوں کے برابر ہوتے ہیں (چھہ ضلع عالی شکل کو مستقیم کہتے ہیں)  
۱۵ مثلث قائم الزویہ اب سی کے قعر ب سی پر بیض ب دی سی بنایا گیا ہی اس میں  
زاویہ د سے عمود د م مثلث کے ضلع اسی پر گرایا گیا ہی اور زاویہ ی سے عمود ی ن ضلع  
اب پر گرایا گیا ہی ثابت کرو کہ ام برابر اب کے اور ان برابر اسی کے ہی

۱۶ مثلث اب سی کا زاویہ سی قائم ہی ایسا خط مستقیم کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کا

متوازی ہو اور جبکہ ہرے مثلث کے ضلعوں اس اور ب سے پرہوں اور جبکہ بیچوں بیچ کا نقطہ اب میں ہو

۲۷ مثلث اب میں متساوی الساقین ہو اسکا زاویہ ب قائمہ اس کے ہر ایک زاویہ سے جو گنا ہی اگر اب نقطہ د تک اتنا بڑھایا جائے کہ پ د دونا اب کا ہو اور بیچ علیا جائے تو مثلث اس کے زاویہ مثلث اب میں کے زاویوں کے الگ الگ برابر ہوں گے

۲۸ متوازی الاضلاع اب میں د کے اندر ایک نقطہ ک ہی اس نقطہ سے ہ ک ج

متوازی اب کا کھینچا گیا ہی اور اسکا سہرا ضلع ا د پر اور سہرا ج ضلع ب میں پر اور اسی نقطہ سے ی ک د متوازی ا د کا کھینچا گیا ہی اور اسکا سہرا ی ضلع اب پر اور سہرا ج ضلع ج پر ہی ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع ج ب اور ی ک کا فرق مثلث ب ک د کا دونا ہی

۲۹ مثلث قائم الزاویہ جسکا ایک ضلع اور دوسرے ضلع اور وتر کا فرق معلوم ہی بناؤ

۳۰ کسی مثلث کے زاویوں کو دو برابر حصوں میں تقسیم کر نیوالے خط مستقیم ایک ہی نقطہ پر ہو کر گزرتے ہیں

۳۱ مثلث اب میں کے ضلعوں ب میں اور اس کے بیچوں بیچ کے نقطہ داوری ہیں اور ا د اور ب ی ایک دوسرے کو نقطہ د پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ ا د دونا ہی ج کا اور ب د دونا ہی ج کا

۳۲ مثلث اب میں کے زاویوں ا اور ب اور میں سے خط مستقیم ا د اور ب ی اور میں آن زاویوں کے سامنے کے ضلعوں کو نقطوں داوری اور د پر دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے یکے پر گئے ہیں ثابت کرو کہ تینوں خط کسی ایک ہی نقطہ ج پر ہو کر گزریں گے اور مثلث ا ج ب اور ب ج میں اور میں ج آ آپس میں برابر ہوں گے

۳۳ کسی مثلث کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں سے جو خط مستقیم ان ضلعوں کے ساتھ زوایہ قائمے بناتے ہوئے یکے پر جائیں گے وہ سب ایک ہی نقطہ پر ملیں گے

۳۲ مثلث اب س کے ضلع الگ الگ مثلث دی ف کے ضلعوں کے دولے میں یعنی ضلع اب دونا ہی ضلع دی کا اور ضلع ب س ضلع ی ف کا اور ضلع س ا ضلع ف د کا مثلث اب س کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں پر ان ضلعوں کے ساتھ زاویے قائم بنائے والے خط مستقیم نقطہ ج پر ملتے ہیں اور مثلث دی ف کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں پر ان ضلعوں کے ساتھ زاویے قائم بنائے والے خط مستقیم نقطہ ہ پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ج ا دونا ہو گا لا د کا اور جو عمود ج سے مثلث اب س کے اب پر ہی دونا ہو گا اس عمود کا جو ہ سے مثلث دی ف کے ضلع دی پر ہی

۳۵ کسی مثلث کے زاویوں سے جو عمود ان زاویوں کے سامنے کے ضلعوں پر گر گئے جائیں گے وہ سب ایک ہی نقطہ پر ہو کر گذریں گے

۳۶ مثلث اب س کے زاویوں سے جو عمود ان زاویوں کے سامنے کے ضلعوں پر گر گئے گئے ہیں وہ نقطہ ج پر ملتے ہیں اور جو خط مستقیم ضلعوں اب اور ب س اور س ا کے بیچوں بیچ کے نقطوں د اوری اور ف سے ان ضلعوں کے ساتھ زاویے قائم بناتے ہوئے کھینچے گئے ہیں وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ا ع دونا ہی ق کا اور ب ع دونا ق کا اور س ع دونا ق کا

۳۷ کسی مثلث کے زاویوں سے جو عمود ان زاویوں کے سامنے کے ضلعوں پر گر گئے گئے ہیں وہ سب آپس میں نقطہ ج پر ملتے ہیں اور جو خط مستقیم ان زاویوں کو ان کے سامنے کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں سے ملاتے ہوئے کھینچے گئے ہیں وہ سب آپس میں نقطہ ج پر ملتے ہیں اور جو خط مستقیم ان ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں پر ان کے ساتھ زاویے قائم بناتے ہوئے کھینچے گئے ہیں وہ سب آپس میں نقطہ ق پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ا ع اور ج اور ف ایک ہی خط مستقیم ہیں

۳۸ پہلے مقالہ کی سی متالیسویں شکل میں ال اور ب ک اور س ف آپس میں ایک ہی نقطہ

پر ملیں گے

۳۹ وہ خط مستقیم جو ایک مثلث کے زاویوں سے آنکے سامنے کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں تک کھینچے گئے ہیں معلوم ہیں اس مثلث کو بناؤ

۴۰ مثلث قائم الزاویہ اب میں کے زاویہ قائمہ کے ایک خط مستقیم دو برابر حصے کرتا ہے اور ایک اور خط مستقیم نقطہ د پر ضلع ب میں کے دو برابر حصے کرتا ہے اور اسکے ساتھ زاویے قائمہ بناتا ہے یہ دونوں خط مستقیم آپس میں نقطہ ی پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ دی اور د ا آپس میں برابر ہیں

۴۱ اب اور ا میں ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بنتے ہیں د کوئی نقطہ اب میں ہی اور ی کوئی نقطہ اس میں ہی دی کو قطر بنا کر آدھا مربع جسکا راس ج ہی بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ ج کا مقام انقطاع وہ خط مستقیم ہی جو زاویہ ب میں کے دو برابر حصے کرتا ہے

۴۲ مربع اب میں د کے قطر اس پر مربع کے برابر ایک ایسا مین ای ف میں بنایا گیا ہے جسکا زاویہ ح و ہ نقطہ ا پر ہی اگر ا نکلا جائے تو زاویہ ب ا میں کے تین برابر حصے ہو جائیں گے

۴۳ متوازی الاضلاعوں میں جنکے ضلعوں کا مجموعہ ایک ہی مربع کا رقبہ سب بڑا ہوتا ہے دیئے ہوئے مربع میں ایسا مربع بناؤ جسکا رقبہ ایک دیئے ہوئے رقبہ کے برابر ہو اور یہ بھی بتاؤ کہ دیئے ہوئے رقبہ کے لئے کیا قید ہونی چاہئے

۴۴ اب میں ایک مثلث ہی اور ا د ایک تہائی اب کی اور ای ایک تہائی اس کی ہی اور ی د اور ب ی ایک دوسرے کو نقطہ پ پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ب ف ی مثلث ب ا میں کا آدھا ہے اور ذرا بلکہ الاضلاع ا د ف ی مثلث ب د ف اور ی ف ی میں سے ہر ایک کے برابر ہے

۴۵ مثلث اب میں کا زاویہ میں قائمہ ہی زاویہ ا کے ایک خط مستقیم سے جو ب میں سے نقطہ د پر نکلتا ہے دو برابر حصے ہوتے ہیں اور زاویہ ب کے ایک اور خط مستقیم سے جو



اس سے نقطہ ی پر قائم دو برابر حصے ہوتے ہیں یہ دونوں خط نقطہ ف پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ مثلث ا ب د ذواربۃ الاضلاع اب دی کا آدھا ہے  
 ۴۷ مثلث مختلف الاضلاع ایسے دو حصوں میں تقسیم نہیں ہو سکتا کہ وہ حصے ایک دوسرے کو پورا پورا ڈھک لیں

۴۸ متوازی الاضلاع اب س د اور اس ی د برابر قاعدوں ب س اور س ی پر اور ایک ہی متوازی خطوں ا د اور ب ی کے درمیان ہیں اور ب د اور ا ی ایک دوسرے کو نقطہ ف پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ ب ف د وائیں ف د کا اور ی ف د وائیں ا کا  
 ۴۹ ذواربۃ الاضلاع اب س د کے شلے اب اور س د متوازی ہیں اور اُس کے وتر اس اور ب د ایک دوسرے کو نقطہ ی پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ نقطہ ی اُس خط کے دو برابر حصے کریگا جو اُس نقطہ سے متوازی اب کا ذواربۃ الاضلاع میں کھینچا جائیگا

۵۰ ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان اور ایک ہی قاعدہ یا برابر قاعدوں پر دو مثلث ہیں ثابت کرو کہ خط مستقیم جو قاعدہ کا متوازی کچا جائے اُس کے حصے جو مثلثوں کے اندر ہوں گے آپس میں برابر ہوں گے

۵۱ مثلث قائم الزاویہ میں مربع بناؤ

۵۲ کسی مثلث میں مربع بناؤ

۵۳ مثلث میں ایسا مربع بناؤ جس کا ایک زاویہ اُس مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو

۵۴ مثلث میں ایسا مربع بناؤ جس کا ایک زاویہ کسی دیے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

۵۵ مثلث اب س میں زاویہ ا قائمہ ہے اور ضلع اس ضلع اب کا دوائی ثابت کرو کہ زاویہ ب زاویہ س کے دو نئے سے بڑا ہوگا

۵۶ کسی مثلث کے ایک زاویہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو جو اُس مثلث میں سے دیا ہوا قیہ کاٹے

۵۷ متوازی الاضلاع کے کسی زاویہ سے ایسے خط مستقیم کھینچو جو اُس کے تین برابر حصے کریں

۵۸ مثلث کے کسی ضلع میں کوئی نقطہ دیا ہو اسی اس نقطہ سے ایسے خط مستقیم کھینچو مثلث کے تین برابر حصے کریں

۵۹ مستقیم الاضلاع کے کسی ضلع میں کوئی نقطہ دیا ہو اسی تباؤ کہ اس نقطہ سے سطح خط مستقیم کھینچ کر مستقیم الاضلاع کے جتنے برابر حصے چاہیں کر سکتے ہیں

۶۰ ۱۰۱ مثلث متساوی الاضلاع ہی اور اب س د ایک ایسا معین ہی جس کا ضلع مثلث کے ضلع کے برابر ہی اور جس کے ضلع ب س اور س د نقطوں ۱۰ اور ۱۱ پر ہو کر گذرتے ہیں ثابت کرو کہ معین کا زاویہ اودق قائموں کا نواں حصہ ہی

۶۱ پہلے مقالہ کی پیروی شکل میں دو متوازی الاضلاع کے دو قطر جن سے ایک قاعدہ کے ایک سرے سے اور دوسرا قاعدہ کے دوسرے سرے سے کھینچا گیا ہی نقطہ ج پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اور ان متوازی الاضلاع کے ضلع یوں ہی یا بڑھ کر نقطہ لا پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ خط مستقیم ج لا یوں ہی یا بڑھ کر قاعدہ کے دو برابر حصے کر چکا

۶۲ مثلث کا قاعدہ اور اس کے ضلعوں کا فرق معلوم ہی اور قاعدہ کے کسی سرے سے اس خط پر عمود گرایا گیا ہی جو قاعدہ کے سامنے کے زاویہ کے دو برابر حصے کرتا ہی اس نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو جب سپریم عمود اس خط سے ملتا ہی

۶۳ مثلث کا قاعدہ اور اس کے ضلعوں کا مجموعہ معلوم ہی اور قاعدہ کے کسی سرے سے اس خط پر عمود گرایا گیا ہی جو اس کے زاویہ خارجی کے دو برابر حصے کرتا ہی اس نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو جب سپریم عمود اس خط سے ملتا ہی نقطہ

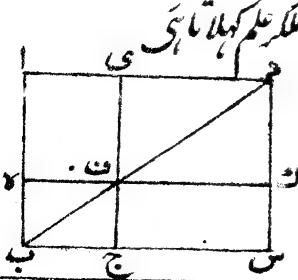
# دوسرا مسئلہ

دو

۱ ہر متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کو قائم الزوا یا کہتے ہیں اور اسکو یوں بیان کرتے ہیں کہ وہ اُن دو خط مستقیم سے گھری ہوئی سطح ہے جسے اسکا ایک زاویہ قائمہ بنا ہوا ہے مثلاً قائم الزوا یا اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ وہ اب اور ب سے

ب سے جسے اسکا زاویہ اب بننا ہوا ہے گھری ہوئی سطح ہے یا کسی اور دو خط مستقیم سے جسے اس کے اور زاویے بنے ہوئے ہیں یعنی ب سے اور س سے یا س د اور د سے یا د اور اب سے گھری ہوئی سطح ہے یا مختصر کے لئے ہم اب اور ب سے گھری ہوئی سطح کے عموماً سطح اب  $\times$  ب سے یا سطح اب  $\cdot$  ب سے لکھتے ہیں یعنی اُن دو خط مستقیم کے درمیان جسے وہ گھری ہوئی ہے ضرب کا نشان یا ایک نقطہ جو ضرب کے نشان کے بجائے استعمال ہوتا ہے لکھتے ہیں ضرب کے نشان اور نقطہ کے لکھنے کی وجہ ہم یہ قدر پہلے مقالہ کے بتیسویں شکل کی شرح میں بیان کر چکے ہیں اور آگے مفصل بیان کریں گے۔ حال کے ہندس اب اور ب سے گھری ہوئی سطح کے عموماً صرف سطح اب  $\cdot$  ب کی لکھیں

۲ ہر متوازی الاضلاع میں اس کے قطر کے گرد جو متوازی الاضلاع ہوں انہیں سے



ہر ایک متوازی الاضلاع اور دو متہم تینوں ملکر علم کہلاتا ہے

مثلاً متوازی الاضلاع ا ج اور دو متہم

ا ن اور س تینوں ملکر علم ہے اور اختصار

کے لئے اسکو صرف ا ج ک یا ی ل سے

یعنی ان حروف سے بیان کرتے ہیں جو ان متوازی الاضلاعوں کے جنسے وہ علم بتا ہی آئے سائن کے زاویوں پر لکھے ہوتے ہیں اسی طرح متوازی الاضلاع کی اور ہی دو قسم اف اور ت منہیں ملکر علم ہی اور وہ حروف ا ب ج یس کی ہ سے بیان ہوتا ہی جو ان متوازی الاضلاعوں کے آئے سائن کے زاویوں پر لکھے ہوئے ہیں جنسے وہ علم بتا ہی

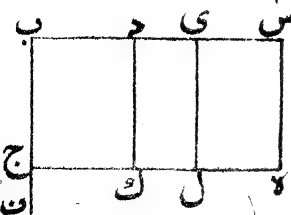
### علوم متعارفہ

- ۱ کل اپنے سب حصوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہی  
 اقلیدس نے اس علم متعارفہ کو نہیں لکھا ہی لیکن اس مقالہ کی شکلوں کے ثابت کرنے میں اسکا اکثر نگہ استعمال کیا ہی
- ۲ اگر دو چیزیں آپس میں برابر ہوں تو دونوں ملکر انہیں سے ہر ایک کی ذی ہوگی  
 اقلیدس نے اس علم متعارفہ کو بھی نہیں لکھا ہی لیکن اسکا استعمال پہلے مقالہ کی بیالیسویں شکل کے ثابت کرنے میں اور خاص کر اس مقالہ میں اکثر نگہ کیا ہی

### شکل ۱ اثباتی

اگر دو خط مستقیم میں سے ایک خط کئی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو سطح دو خط مستقیم کی برابر ہوگی ان سب سطحوں کے مجموعہ کے جو خط غیر منقسم اور خط مستقیم کے ہر حصہ سے بنتی ہیں

فرض کرو کہ ا اور ب س دو خط مستقیم ہیں جن میں سے ب س نقطوں ح اور ی پر کئی حصوں ب د اور دی اور ی میں تقسیم ہوا ہی



تو سطح ا اور ب س کی برابر ہوگی  
 ان سب سطحوں کے مجموعہ کے جو ا اور ب سے  
 اور ا اور دی سے اور ا اور ی سے بنتی ہیں

نقطہ ب سے ب ت خط ب س کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو شکل ۱۱ مقالہ

اور ب ج برابر کے بناؤ شکل ۱۲ مقالہ

نقطہ ج سے ج ہ متوازی ب س کا اور نقطہ ح اور ی اور ی سے د ک اور ی ل اور ی ہ متوازی ب ج کے اور ج ہ سے نقطوں ک اور ل اور ہ پر ملنے ہوئے کھینچو شکل ۱۳ مقالہ

اب سطح ب ہ برابر ہی سطحوں ب ک اور د ل اور ی ہ کے علوم متبادلہ مقالہ لیکن ب ہ ہی سطح ا اور ب س کی کیونکہ وہ گھری ہوئی ہی ج ب اور ب سے جنہیں سے ج ب برابر ہی کے

اور د ل ہی سطح ا اور ب د کی کیونکہ وہ گھری ہوئی ہی ج ب اور ب سے جنہیں سے ج ب برابر ہی کے

اور د ل ہی سطح ا اور د ی کی کیونکہ د ک یعنی ب ج (شکل ۱۴ مقالہ) برابر ہی کے

اور اسی طرح ی ہ ہی سطح ا اور ی س کی اسلئے سطح ا اور ب س کی برابر ہی ان سب سطحوں کے مجموعہ کے جو ا اور

ب د سے اور ا اور د ی سے اور ا اور ی س سے بنتی ہیں اسلئے اگر دو خط مستقیم میں سے الخ - یہی ثابت کرنا تھا اس مقالہ میں اقلیدس نے ان سطحوں کے آپس کے علالتے بیان کئے ہیں جو خطوں کے مختلف حصوں سے بنتی ہیں

جب ایک خط مستقیم دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر ٹکڑے کو اقلیدس نے اس خط کا حصہ کہا ہے مگر لفظ حصہ کے معنی کو ہند سوں نے زیادہ وسعت دی ہے اور اسلئے اسکی یہ تعریف لکھی ہے کہ کسی ایسے حصے کو خط تقسیم پر یوں ہی یا اسے بڑھا کر بڑھے ہوئے ٹکڑے پر کوئی نقطہ مقرر کر یں تو ان

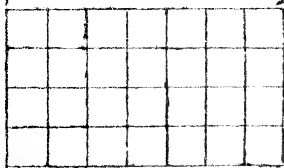


الین دونوں خطوں کا تقسوم علیہ مشترک کہلاوگا اور وہ خط مقدار متوافقہ کہلاوینگے۔ یہ پیمانہ ایک فرضی مقدار ہے لیکن جب اسکو ایک نفع مقرر و معین کر لیا تو پھر وہ بدل نہیں سکتا مثلاً ہمکو اختیار ہے کہ ہم اپنے پیمانہ کی لبنائی خواہ ایک گز یا ایک فٹ یا ایک انچہ مقرر کریں لیکن مقرر کرنے کے بعد ہمیں اسی کا پابند رہنا چاہئے اور ہر ایک خط کی لبنائی اُسی پیمانہ سے نابنی جائیے یعنی دریافت کرنا چاہئے کہ ہر ایک خط اُس پیمانہ سے کئی گنا ہے۔ پس یہاں سے مقدار متصل اور مقدار منفصل کی مناسبت ظاہر ہوتی ہے یعنی یہ امر دریافت ہوتا ہے کہ عدد ایک آگے ہی جسکے ذریعہ سے ہم بہ دریافت کر سکتے ہیں کہ فلاں مقدار کتنی ہے یعنی کس عدد سے اُسکا اندازہ کر سکتے ہیں اگر عدد نہ ہو تو ہم کسی مقدار کو بلا اسکے یا آگے کی ہر ایک کے دکھلائے نہیں ظاہر کر سکتے ہیں عدد ہی کے ذریعہ سے ہر ایک خط کی لبنائی کو کسی خاص لبنائی سے جسکو ہم خوب جانتے ہیں اور جسکو پیمانہ کہتے ہیں مقابلہ کر کے اس خط کی لبنائی کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ وہ اُس پیمانہ کی اتنی بار ہے۔ اب تک ذکر ایسے خط کا تھا جسکو کوئی خاص پیمانہ پورا پورا ناپ سکتا تھا لیکن اب ہم ایسا خط فرض کرتے ہیں جسکو کوئی خاص پیمانہ پورا پورا ناپ سکے مثلاً خط

**ا ب ب ب ب ب ب** ! اس میں سے اگر ہم اس اور س د اور د

اور ی ف برابر اُس پیمانہ کے کاٹتے ہیں تو آخر کو ایک حصہ ف ب باقی رہ جاتا ہے جو ہمارے فرض کئے ہوئے پیمانہ سے چھوٹا ہے اس صورت میں دیے ہوئے خط کی مقدار کیسے دریافت ہو سکتی ہے یا دیکھو کہ اُسکے دریافت کر نیکا طریقہ یہ ہے کہ اُس پیمانہ کے برابر برابر حصے کرتے چلے جاؤ یہاں تک کہ دیے ہوئے خط کا بچا ہوا حصہ اُس پیمانہ کے آخر حصہ کے برابر یا اسکے چند بار ہو فرض کرو کہ اصل پیمانہ ہمارا ایک گز ہے اور اُس سے اگر ہم ایک یے ہوئے خط کو ناپیں تو وہ پیمانہ کے چند بار لینے سے پورا پورا نہیں بچ سکتا ہے پیمانہ کا چار بار لینے کے بعد ایک حصہ اُس خط کا جو پیمانہ معینہ سے چھوٹا ہے بچ رہتا ہے لیکن اگر ہم اُس پیمانہ کو سو لہ برابر حصوں میں تقسیم کریں تو معلوم ہوتا ہے کہ باقی حصہ بھی اُس پیمانہ کے سو لہوں حصہ کا چھٹا ہے اس صورت میں ہم اصل خط کی لبنائی کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں کہ وہ  $(19 \times 4 + 5)$  یعنی ۷۹ پیمانہ ہی اُس پیمانہ سے جو ہمارے فرض کئے ہوئے پیمانہ یعنی گز کا سو لہواں حصہ ہے اور اُس طریقہ سے

یعنی پیمانہ کو چھوٹا کرنے سے ہم دو یا زیادہ خطوں کو ایک ہی پیمانہ سے ناپ سکتے ہیں مثلاً چار گز اور پانچ گز تین گزہ کی لبنائی ایک ہی پیمانہ سے جسکی لبنائی ایک گزہ ہی نہ ہو سکتی ہے لیکن بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ دو خط ایک پیمانہ سے گودہ پیمانہ کیسا ہی چھوٹا کر دیا جاوے نہیں پ سکتے ہیں مثلاً کسی مربع کا ضلع اور اسکا وتر اور نیز دائرہ کا قطر اور اسکا محیط ایک ہی پیمانہ سے نہیں پ سکتے ہیں ایسی مقداروں کو متقاویہ بتایا نہ کہتے ہیں ہم نے اب تک صرف ایک قسم کی مقدار یعنی صرف خطوں کا بیان کیا ہے لیکن ہر قسم کی مقدار کا خواہ وہ سطح ہو یا جسم ہو یا زاویہ ہو اس سطح پر اندازہ ہو سکتا ہے یا ان تناسبوں پر ہے کہ جو پیمانہ ہم فرض کریں وہ اسی قسم کا جو جس قسم کی مقدار کا ہم اندازہ کرنا چاہتے ہیں یعنی سطحوں کے ناپنے کے لئے پیمانہ سطح ہو اور جسم ناپنے کے لئے جسم اور زاویہ کے ناپنے کے لئے زاویہ۔ ان سبعہ تروں میں مثل خطوں کے پیمانہ فرضی ہی اور سطح کے ناپنے کے لئے ہر قسم کی سطح پیمانہ ہو سکتی ہے خواہ وہ مستطیل ہو یا مربع یا مثلث لیکن مروج اور زیادہ پہل پیمانہ وہ مربع ہی جسکے ضلع کی لبنائی پیمانہ طولانی کی لبنائی کے برابر ہی اور جسم کے ناپنے کے لئے پیمانہ ایک مکعب ہی جسکی ہر ایک حد سطح مستوی پیمانہ سطح ہی مثلاً اگر خطوں کے لئے ایک فٹ طول پیمانہ مقرر کیا جائے تو ایک مربع فٹ سطحوں کے ناپنے کے لئے اور ایک مکعب فٹ جسموں کے ناپنے کے لئے مقرر ہوگا فرض کرو



ب

س

کہ اب س د ایک مستطیل ہے جسکے دو ضلعوں اب

اور اد کی لبنائی ایک ہی پیمانہ سے اندازہ ہو سکتی ہے

یعنی اب پورا پورا چار پیمانہ ہی اور اد پورا پورا

سات پیمانہ ہی پس اگر اب کو چار حصوں میں تقسیم کیا جاوے اور اد کو سات برابر حصوں میں

اور اب کے نقطوں تقسیم سے اد کی متوازی اور اد کے نقطوں تقسیم سے اب کے متوازی

خط کھینچے جاویں تو صاف ظاہر ہو کہ جنہ جتنے آئیں مستطیل کے ان خطوں کے کھینچنے سے ہو گے

انہیں سے ہر ایک حصہ ایک مربع پیمانہ ہی اور چونکہ ہر مستطیل کا رقبہ جتنے پیمانے اس مستطیل میں تھے ہیں

انکے شمار دریافت ہوتا ہے پس مستطیل اب س د کا رقبہ بھی اسی شمار ان مربعوں کے جنہیں متوازی خطوں



کھینچنے سے تقسیم ہوا ہی قرار پائے گا جب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ بڑے ہوئے خط جو اد کے متوازی  
 ہیں مستطیل کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور کھڑے خط جو اب کے متوازی ہیں  
 ان برابر حصوں میں سے ہر ایک کے ساتھ برابر حصے کرتے ہیں تو کل چھوٹے حصوں کا  
 شمار سات کا چو گنا لینے سے یعنی سات کو چار سے ضرب دینے سے معلوم ہو جائیگا کہ کسی  
 مستطیل کے مربع چنانوں کا شمار دریافت کرنے کے لئے ہمیں ان وعدہ دو کو آپس میں ضرب دینا چاہئے  
 جو ان ہیسا نوں کا شمار جو مستطیل کے دو متصل ضلعوں میں ہر ایک ہر کرتے ہیں جب سطح مربع ہی ہو  
 ضلع آپس برابر ہیں یعنی ہر ایک ضلع میں چنانوں کا شمار ایک ہی ہوا سکتا ہے اس مربع میں مربع  
 چنانوں کا شمار دریافت کرنے کے لئے اس عدد کو جو اس کے ایک ضلع کے چنانے طولانی کے شمار کو ظاہر  
 کرتا ہے اسی عدد سے ضرب دینا چاہئے جب ہر کہ لفظ مربع علم حساب جبر مقابلہ میں اس حاصل ضرب کا نام ہے  
 جو کسی عدد کو اپنی ذات میں ضرب دینے سے حاصل ہو لیکن ظاہر علم کو یاد رکھنا چاہئے کہ علم ہند میں لفظ  
 مربع جس معنی میں بولا جاتا ہے وہ معنی علم حساب جبر مقابلہ میں نہیں لئے جاتے ہیں بلکہ علم ہند میں  
 مربع اسکو کہتے ہیں جو ایک خط پر بنایا جاوے اور علم حساب جبر مقابلہ میں مربع اس حاصل ضرب کا نام ہے جو  
 ایک عدد کو اپنے ہی آپ میں ضرب دینے سے حاصل ہو مثلاً اگر ب کسی مربع کے ضلعوں کے چنانوں کی  
 تعداد کو ظاہر کرے تو حاصل ضرب ب کا جب وہ اپنی ذات سے ضرب دیا جاتا ہے یعنی ب ب  
 یا ب<sup>۲</sup> مربع کے مربع چنانوں کی تعداد کو ظاہر کرے گا اور اسی طرح اگر ب اور ب کسی مستطیل کے  
 دو متصل ضلعوں کے چنانوں کی تعداد کو بیان کریں تو حاصل ضرب ب اور ب کا یعنی  
 ب ب<sup>۲</sup> مستطیل کے مربع چنانوں کی تعداد کو بیان کرے گا پس معلوم ہوا کہ ان اصولوں کے  
 ذریعہ سے جو ہم نے اوپر بیان کئے ہر مستطیل کی سطح کی مقدار کو بیان کر سکتے ہیں اور اسکی سب  
 خاصیتوں پر جنہو علم ہند میں کی رو سے بحث ہوتی ہے جبر مقابلہ کی رو سے بحث کر سکتے ہیں لیکن ب  
 ب اور ب کی جگہ پر کوئی خاص قیمت ۲ یا ۳ یا ۴ وغیرہ لکھنا چاہیں تو بعض اوقات ایسا معلوم  
 ہوتا ہے کہ دو مقداریں جنکو ہم ب اور ب سے بیان کرتے ہیں یہاں ہیں ایسی صورت ہیں

کوئی مقسوم علیہ پیمانہ مشترک گو وہ کیسا ہی چھوٹا لیا جاوے نہیں دریافت ہو سکتا ہی جسکے ذریعہ ہم اُس مسئلے کے ضلعوں کی لبنائی کا اندازہ کر سکیں اسلئے اس صورت میں کوئی خاص قیمت بہ اور اس کی جگہ پر نہیں استعمال کر سکتے ہیں اور اسلئے اُس مسئلے کا رقبہ حساب کی روش سے ٹھیک ٹھیک نہیں دریافت ہو سکتا ہی

اب چونکہ مقدار متصل و منفصل کی مناسبت اور نیز ان کا فرق ظاہر ہو چکا ہم اس کتاب میں دوسرے مقالہ کی ان شکلوں کا جنکا جبر متبادلہ سے بنو حاصل ہو سکتا ہی ثبوت جبر یہ اُن کے آگے لکھیں گے۔

### پہلی شکل کا ثبوت جبر یہ

فرض کرو کہ خط ب س کی لبنائی ۱ پیمانہ ہی اور خط ا کی لبنائی ۲ پیمانہ ہی اور ب د اور د ی اور ی س حصوں کی لبنائی ترتیب وار ۴ اور ۳ اور ۲ پیمانہ ہی

جو مکمل اُٹل اپنے سب حصوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہی

$$\text{اسلئے } ۱ = م + ن + ک$$

اگر ان برابروں میں سے ہر ایک کو ب سے ضرب دیا

$$\text{تو } ۱ \times ب = ب \times م + ب \times ن + ب \times ک$$

$$\text{اسلئے } ۱ \times ب = ب \times م + ب \times ن + ب \times ک$$

اسلئے حاصل ضرب اُن دو عددوں کا جنہیں سے ایک کئی حصوں میں تقسیم ہوا ہی برابر ہی اُن حاصل ضربوں

کے مجموعہ کے جو غیر منقسم عدد کو منقسم عدد کے ہر ایک حصہ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں

یعنی اگر ان حاصل ضربوں کے مابقی علم ہندسہ کی روش سے خیال کئے جاویں) مربع بیانوں کا شمار

جو حاصل ضرب ۱  $\times$  ب سے بیان ہوتا ہی برابر ہی اُن مربع بیانوں کے شمار کے جو حاصل ضربوں

ب  $\times$  م اور ب  $\times$  ن اور ب  $\times$  ک کے مجموعہ سے بیان ہوتا ہی

### مشق

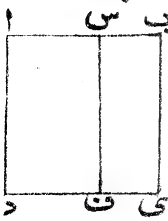
اگر دو خط مستقیم میں سے ہر ایک کئی کئی حصوں میں تقسیم ہو تو سطح دو خط مستقیم کی برابر ہوگی

اُن سب سطحوں کے مجموعہ کے جو ایک خط کے سب حصے علیحدہ علیحدہ دوسرے خط کے سب حصوں کے ساتھ بناتے ہیں

### شکل ۲ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو سطحیں جو مکمل خط اور اس کے حصے سے بنتی ہیں ملکر برابر ہوں گی مکمل خط پر کے مربع کے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ سے پر تقسیم ہوا ہے تو سطح اب اور ب س اور سطح اب اور اس کی ملکر برابر ہوگی اب پر کے مربع کے



اب پر مربع ادنیٰ بناؤ (شکل ۲ مقابلہ) اور نقطہ سے سے س ف متوازی ادیا اب ی کا کچھچھو (شکل ۳ مقابلہ)

اب ای برابر ہوگی سطح ف م الزاویہ اے اور سی کے لیکن ای خط اب پر کا مربع ہے

اور اے ہی سطح ب اور اس کے کیونکہ وہ ہی سطح د ا اور اس کی نہیں سے د ا برابر ہی اب کے

اور سی ہی سطح اب اور ب س کی کیونکہ بی برابر ہی اب کے اسلئے سطح اب اور اس اور سطح اب اور ب س کی ملکر برابر ہیں اب پر کے مربع کے اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

یہ شکل اس مثال کی پہلی شکل کی ایک خاص صورت ہے پہلی شکل میں اگر دونوں خط مستقیم آپس میں برابر ہوں اور ان میں سے ایک دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہو تو پہلی شکل اور یہ شکل ایک ہو جائیگی

ثبوت جبروت

فرض کرو کہ اب طول میں اپنا ہم ہی اور اس اور ب ترتیب وارم اور پناہ میں

$$تو \quad م + ن = ۱$$

ان برابر جنہوں میں سے ہر ایک کو اسے ضرب دو

$$اسلے 1 \times م + 1 \times ن = 1$$

یعنی اگر کوئی عدد دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو حاصل ضرب شکل عدد اور اس کے ہر ایک حصہ کے ملکر برابر ہوتے ہیں کل عدد کے مربع کے

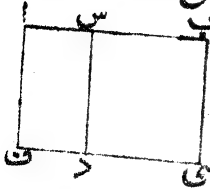
مشق

کسی خط مستقیم پر کا مربع اس خط کے آدھے پر کے مربع کا چوگنا ہوتا ہے

شکل ۳ اشاتی

اگر کوئی خط مستقیم کسی دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو سطح جو کل خط اور اس کے کسی ایک حصہ سے بنتی ہے برابر ہوگی اس حصہ پر کے مربع اور اس سطح کے مجموعہ کے جو خط کے دونوں حصوں سے بنتی ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ سے تقسیم ہوا ہے تو سطح اب اور ب ہو اگر برابر ہوگی اب میں پر کے مربع اور سطح اس اور سی اب کے مجموعہ



ب میں پر کے مربع اور سطح اس اور سی اب کے مجموعہ اور یہ دو کونٹ تک ہر ما کر نقطہ اسے ان

متوازی میں دیا بی کا یکجہو شکل ۳ مقالہ

اب قائم الزاویہ ای برابر ہوگی سطح قائم الزاویہ ا د اور سی کے علوم متاثلہ مقالہ

لیکن ای ہی سطح اب اور ب میں کی کیونکہ وہ ہی سطح اب اور ب میں کی

جنہیں سے بی برابر ہوگی میں کے

اور اد ہی سطح اس اور سی میں کی کیونکہ میں برابر ہوگی میں ب کے

اور سی میں مربع ب میں پر کا ہی

اسلے سطح اب اور ب میں کی برابر ہوگی میں پر کے مربع اور سطح اس

اور سب کے مجموعہ کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

یہ شکل بھی اس مقالہ کی پہلی شکل کی ایک خاص صورت ہے پہلی شکل میں اگر ایک خط مستقیم دو حصوں میں تقسیم ہو اور ان حصوں میں سے ایک حصہ دوسرے خط مستقیم کے برابر ہو تو پہلی شکل اور یہ شکل ایک ہو جائیگی  
ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ اب طول میں  $ل$  پانچہ ہی اور ب سے طول میں  $م$  پانچہ اور اس طول میں  $ن$  پانچہ

$$تو \quad ۱ = م + ن$$

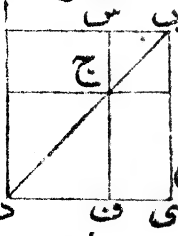
ان برابر چیزوں کو  $م$  سے ضرب دو

$$اسلئے \quad ۱ \times م = م + م \times ن$$

یعنی اگر کوئی عدد دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو حاصل ضرب کل عدد اور اس کے ایک حصہ کا برابر ہوتا ہے اسی حصہ کے مربع اور حاصل ضرب دو نو حصوں کے مجموعہ کے

شکل ۴ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم کسی دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو کل خط پر کا مربع برابر ہوگا  
دونوں حصوں پر کے مربعوں معہ اس سطح کی دونوں کے جو ان حصوں سے بنتی ہے  
فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ سے تقسیم ہوا ہے تو  
اب پر کا مربع برابر ہوگا اس اور سب پر کے مربعوں معہ دونوں سطح اس اور  
سب کے



اب پر مربع ادی ب بناؤ شکل ۵ متالہ  
اور ب د کو ملا کر اس نقطہ سے س ج ف متوازی  
ادیاب ی کا اور ب د سے نقطہ ج پر اور دی  
سے نقطہ ف پر ملتا ہوا کیچھو

شکل ۵ متالہ

اور ج نقطہ سے  $\angle$  ج متوازی اب یادی کا اور ا سے نقطہ  $\angle$  پر اور  
ب ی سے نقطہ  $\angle$  پر ملتا ہوا کھینچو

اب جو کم سن متوازی ہی ا د کا اور ب د انہی گرتا ہی کے  
اسلئے زاویہ ج ب ج میں برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ ا خ ب د ا شکل ۱۹  
لیکن زاویہ ب د ا برابر ہی زاویہ ب ا کے (شکل ۱۹ مقالہ) کیونکہ ب ا اور ا د  
مربع کے ضلع ہونے کی وجہ سے آپس میں برابر ہیں

اسلئے زاویہ میں ج ب برابر ہی زاویہ میں ب ج کے  
اسلئے ضلع ب ب میں برابر ہی ضلع میں ج ج کے  
لیکن ب ب میں برابر ہی ج ج کے اور میں ج برابر ب کے  
اسلئے شکل میں ج ج ب مساوی الاضلاع ہوئی

اور ایسے ہی وہ قائم الزوا یا بھی بنی  
کیونکہ ج ب ج متوازی ب ب کا ہی اور ب ب انہی گرتا ہی تو زاویے  $\angle$  ب ب  
اور ب ب ج ملکر برابر دو قائموں کے ہیں

لیکن زاویہ  $\angle$  ب ب میں ایک زاویہ قائمہ ہی  
اسلئے زاویہ ب ب ج بھی ایک قائمہ ہی  
اور اسلئے زاویے میں ج ج  $\angle$  اور ج  $\angle$  ب بھی جو ان کے سامنے ہیں قائمے

ہیں اسلئے میں ج ج ب قائم الزوا یا ہی اور وہ مساوی الاضلاع پہلے ثابت

ہو چکی ہی  
اسلئے وہ مربع ضلع ب ب میں برابر ہی  
اور ایسی ہی دلیل سے کہ مربع ج ج برابر ہی اور ج ج برابر اس کے ہی شکل ۲۰

اسلئے ہ ف اور س ک مربعے اس اور ب س پر ہوئے  
 اور چونکہ تمام اج برابر ہی متمم ج ی کے  
 اور اج ہی سطح اس اور س ب کی کیونکہ ج س برابر ہی س ب کے  
 اسلئے ج ی برابر ہی سطح اس اور س ب کے  
 علوتم عاقلہ مقالہ  
 اسلئے اج اور ج ی ملکر برابر ہیں سطح اس اور س ب کی دونی کے  
 اور ہ ف اور س ک مربعے میں اس اور س ب پر کے  
 اسلئے چار شکلیں ہ ف اور س ک اور اج اور ج ی برابر ہیں اس  
 اور س ب پر کے مربعوں کے اور سطح اس اور س ب کی دونی کے  
 لیکن ہ ف اور س ک اور اج اور ج ی ملکر کل شکل ادی ب کو جواب  
 پر کا مربع ہی بناتی ہیں  
 اسلئے اب پر کا مربع برابر ہی اس اور س ب پر کے مربعوں معہ دونی  
 سطح اس اور س ب کے  
 اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا  
 نتیجہ صریح۔ اس شکل کے ثبوت سے صاف ظاہر ہے کہ مربع کے قطر کے گرد کے متوازی الماضی بھی  
 مربع ہوتے ہیں

اس شکل کو اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں  
 فرض کرو کہ اب کسی دو حصوں میں نقطہ س تقسیم ہوا ہے تو اب پر کا مربع برابر ہوگا اس اور س ب  
 پر کے مربعوں معہ دونی سطح اس اور س ب کے  
 اب پر مربع ادی ب بناؤ  
 شکل ۴ مقالہ  
 ادی س سے اہ برابر ب س کے کاؤ تو اہ د برابر ہی اس کے  
 ج متوازی ادکا و ا ک متوازی اب کا اور ج سے نقطہ ف پر بناؤ اب ا ک جیچہ  
 شکل ۵ مقالہ

ابج پر یک بک برابر ہی اہ کے اور اہ برابر ہی اس کے کاٹا گیا ہی اسلئے بک برابر ہی بک کے  
اسلئے بک اور ک ف اور ف اس اور اس ب سب برابر ہیں

اسلئے متوازی الاضلاع ب س ف ک متساوی الاضلاع ہی

اور چونکہ زاویہ ک ب س قائمہ ہی اسلئے س ک مربع ب س پر کا ہی شرح ج ۳ مقالہ

ایسی ہی ایل سے ج مربع اس پر کا ہی کیونکہ ۷ د اور ۷ ف میں سے ہر ایک برابر ہی اس کے

اب ای برابر ہی ج اور س ک اور ف اور ف کے مجموعہ کے علو متعارفہ مقالہ

لیکن ای مربع ہی اب پر کا اور ج مربع اس پر کا اور س ک مربع ب س پر کا

اور ف ہی سطح اس اور س ب کی کیونکہ س ف برابر ہی س ب کے

اور ف ہی سطح اس اور س ب کی کیونکہ ف ج برابر ہی اس کے اور ک برابر ہی ب کے

اسلئے اب پر کا مربع برابر ہی اس اور س ب پر کے مربعوں معدونی سطح اس اور س ب کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اس شکل کے ثابت کرنے کا تیسرا طریقہ یہ ہے

فرض کرو کہ کوئی خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہو ہی ب س

تو اب پر کا مربع برابر ہو گا اس اور س ب کے مربعوں معدونی سطح اس اور س ب کے

چونکہ اب پر کا مربع برابر ہی سطح اب اور ب س اور سطح اب اور اس کے مجموعہ کے شکل مقالہ

لیکن سطح اب اور ب س کی برابر ہی ب س پر کے مربع اور سطح اس اور س ب کے مجموعہ کے

اور سطح اب اور اس کی برابر ہی مربع اس اور سطح اس اور س ب کے مجموعہ کے شکل مقالہ

اسلئے اب پر کا مربع برابر ہی اس اور س ب پر کے مربع معدونی سطح اس اور س ب کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جہیدہ

فرض کرو کہ اب طول میں اچانہ ہی اور اس اور س ب ترتیب وارم اور ن بچانہ ہیں



تو  $1 = م + ن$

ان دونوں برابر کو جمع کیا

اسلئے  $1 = (م + ن)^2$

اسلئے  $1 = م^2 + ن^2 + 2 \times م \times ن$

یعنی اگر کوئی عدد دو حصوں میں تقسیم ہو تو کل عدد کا مربع برابر ہی ان حصوں کے مربعوں کے مجموعہ و اضافہ صاف صاف ہوگا

مثق

۱ اب اس ایک مثلث ہی جیسا کہ اوپر آقا نے ہی اور اذ ضلع ب اس پر عمود ہی ثابت کرو کہ سطح ب د اور دس کی برابر ہی ا د پر کے مربع کے

مثق ۵ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو برابر اور دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو دونوں برابر حصوں کی سطح اور اس خط پر کا مربع جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان واقع ہی ملے گا برابر ہوگا اور اسے خط مستقیم پر کے مربع کے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب نقطہ میں پر دو برابر حصوں میں اور نقطہ پر دو برابر حصوں میں تقسیم ہوا ہے  
تو سطح ا د اور دس کی اور س د پر کا مربع ب د پر کا مربع کے  
ملک برابر ہوگا اس ب پر کے مربع کے

س ب پر مربع س ی ف ب بناد (شکل ۱ مثلاً) اور پ ی ملاؤ

دس د ل ج متوازی س ی یا ب ف کا اور پ ی سے نقطہ کا پر اور

ی ف سے نقطہ ج پر ملتا ہوا کھینچو

اور ب سے ل م متوازی س ب یا ی ف کا اور س ی سے نقطہ ل اور

ب ف سے نقطہ م پر ملتا ہوا کھینچو

اور اسے ایک متوازی سیل یا بام کا اووم لک سے نقطہ کی برکتا ہے  
اب چونکہ متمم سے برابر ہی متمم لا ف کے

شکل ۳۳ مقالہ

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں دم ملاؤ  
اسلئے کل سے م برابر ہی کل د ف کے

علوم متعارفہ مقالہ

فرض

شکل ۳۴ مقالہ

علوم متعارفہ مقالہ

لیکن چونکہ اس برابر ہی سے ب کے  
اسلئے ال برابر ہی سے م کے  
اسلئے ال برابر ہی د ف کے

علوم متعارفہ مقالہ

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں سے ہ ملاؤ  
اسلئے کل ال برابر ہی د ف اور سے ہ کے

لیکن اہ ہی سطح اد اور د ب کے کیونکہ د برابر ہی د ب کے

اور د ف اور سے ہ ملکہ علم سے م ج ہی

اسلئے علم سے م ج برابر ہی سطح اد اور د ب کے

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں ل ج جو سے د پر کا ملے ہی (تہجیرج شکل مقالہ) ملاؤ

اسلئے علم سے م ج اور ل ج ملکہ برابر میں سطح اد اور د ب سے م ج د پر کے

علوم متعارفہ مقالہ

مربع کے

لیکن علم سے م ج اور ل ج ملکہ شکل سے ی ف ب کو جو سے ب پر

کا ملے ہی بناتے ہیں

اسلئے سطح اد اور د ب کی اور سے د پر کا ملے ملکہ برابر ہی سے ب کے پر ملے کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - ہی ثابت کرنا تھا

اسی شکل کو اس طرح بھی ثابت کرتے ہیں

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں نقطہ سے پر اور دو برابر حصوں میں نقطہ د پر

تفسیر: ہم دیکھتے تو سطح ادا اور دبکی اور سدی پر کامیج ملکر برابر ہو گا سب پر کے مربع کے

19

سحاب یرمیع سوی قبا بنائو

دخ ستوازی سے ی کا کیچڑ (شکل ۳ مقالہ)

درا نہیں سے دہ برابر دب کے کاٹو

ک ل ک متوازی ادکا اور اک متوازی ف ج ی

نکول

۷۸۶ کیلپی

جو کہ بابت برابری اس کے اور پد برابر میل کے

اسلئے قائم الزاویہ ال برابر ہی قائم الزاویہ د ف کے

ان دونوں برابر ہیں سے ہر ایک میں سے ۱۰ ملاؤ

اسلئے کل اہل برابر عیسیٰ لا اور دفن کے مجموعہ کے

لیکن اس طرح اداورد ب کی کیونکہ وہ برابر ہی د ب کے

اسلئے سطح ۱۰ اور دب کی برابر تھی ۱۰ اور دب کے مجموعہ کے

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں ل ج جو س د پر کا بیج ہی ملاؤ

اس لئے سطح ادا اور دبکی اور سد پر کام ملے ٹکڑے پر اس میں سے کہ اور دفن اور لیج

کے لیے

لیکن سہ اوردن اور لچکڑے شکل سے یہ کچھ سب سے پہلے پر مبنی

بناتے ہیں

اسلئے سطح ادا اور دبکی اور سی دپر کا منبع ملکر برابر ہی سی ب پر کے منبع کے

اسکے اگر کوئی خطاستہ یقیناً الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا

یہ مشکل تیسرے طریقہ سے اس طرح ثابت ہوتی ہے

فرض کرو کہ اب دو برابر حصوں میں نقطہ سے پراور دو برابر حصوں میں نقطہ دے کر تقسیم ہوتی ہے تو سطح

اور دب کی اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  $b$   $d$   $s$  !  
 چونکہ سطح  $s$  د اور دب کی اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 (شکل ۳ مقالہ ۲) اور اس برابر ہے جس کے برابر ہے کے  
 اس لئے سطح  $s$  د اور دب کی اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 ان دونوں برابر ہیں جس کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 اس لئے  $s$  د اور دب کی سطح کا دونا اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 سطح  $s$  د اور دب کے مجموعہ کے

لیکن سطح  $s$  اور دب کی اور سطح  $s$  د اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 اس لئے  $s$  د اور دب کی سطح کا دونا اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 ان دونوں برابر ہیں جس کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 اس لئے  $s$  د اور دب کی سطح کا دونا اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 کے برابر اور سطح  $s$  د اور دب کے مجموعہ کے  
 لیکن  $s$  د اور دب کی سطح کا دونا اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 کے برابر کے

اس لئے سطح  $s$  د اور دب کی اور دب کے برابر ہیں جس کے برابر ہے کے  
 اس لئے اگر کوئی خط مستقیم  $mn$  یہی ثابت کرنا تھا  
 ثبوت جبرہ

فرض کرو کہ اب طول میں ۲ پیمانہ ہو اور اس کا ہر ایک آدھا اس یا م ب طول میں ۱ پیمانہ  
 ہو اور م ب طول میں ۱ پیمانہ ہو  
 تو اس کے دونا برابر ہو جس سے پیمانہ د طول میں (۱+م) پیمانہ ہو اور چھوٹا پیمانہ  
 دب طول میں (۱-م) پیمانہ ہو اور م ب (۱+م) اور (۱-م) کے فرق کا آدھا

$$\text{ایسٹے } (1+m) (1-m) = 1 - m^2$$

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں  $m$  ملا دیا

$$\text{ایسٹے } (1+m) (1-m) = 1 - m^2$$

یعنی اگر کوئی عدد دو برابر اور دو نام برابر حصوں میں تقسیم ہو تو دو نام برابر حصوں کا حاصل ضرب برابر ان

حصوں کے فرق کے آدھے کا مربع ملے گا برابر میں اس عدد کے آدھے کے مربع کے

اس شکل کے پہلے ثبوت کے دیکھنے سے معلوم ہو گا کہ سطح اد اور دب کی برابر ہی علم میں آج کے

لیکن علم میں آج شکلوں سے ت اور ل ج کا جو اس اور س د پر کے مربع میں فرق ہی اگر

اس اور س د کا بعد اخط خیال کئے جائیں تو اد دونوں خط اس اور س د کا مجموعہ ہی اور

دب ان دونوں خطوں کا فرق ہی اور اسٹے یہ نتیجہ صریح اس شکل سے ثابت ہے کہ کسی خط کے مجموعہ

اور ان کے فرق کی سطح برابر ہی ان دونوں خطوں کے مربعوں کے فرق کے

اس شکل میں ثابت ہوا ہے کہ سطح اد اور دب کی اور س د پر کا مربع ملے گا برابر میں اس یا سب

پر کے مربع کے یعنی سطح دو نام برابر حصوں اد اور دب کی ہر صورت میں چھوٹی ہی اس یا سب

کے مربع سے لیکن اس یا سب پر کا مربع ہی سطح اس اور سب کی ایسٹے اس سے

یہ نتیجہ ثابت ہوا کہ کسی دیے ہوئے خط متقیم کے دو حصوں کی سطح اس صورت میں انہما

درجہ کی بڑی ہوگی جب تقسیم کا نقطہ اس خط کے آدھے پر ہے

### مشق

۱ مثلث قائم الزاویہ کے ان دو ضلعوں میں سے جو اسکے زاویہ قائمہ کو بناتے ہیں کسی ضلع پر کا

مربع برابر ہو تا ہی اس سطح کے جو مثلث کے دوسرے ضلع اور وتر کے مجموعہ اور فرق سے بنتی ہے

۲ ایسی سطح بناؤ جو دو دیے ہوئے مربعوں کے فرق کے برابر ہو

۳ اب سو مثلث مختلف الاضلاع ہی اور س د عمود ہی اب پر او نقطہ ی ضلع اب

کے بچوں بیچ کا نقطہ ہی ثابت کرو کہ اس اور سب پر کے مربعوں کا فرق برابر ہی اس سطح

کی دفنی کے جواب اور دی سے بنتی ہی اور اس نتیجہ سے مثلث کا رقبہ دریافت کر لیا قاعدہ لکھو

یہ اس کے تینوں ضلعوں کی لمبائیاں معلوم ہیں

کسی خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ان حصوں کی سطح برابر دیے ہوئے مرن کے ہو

## شکل ۱۱ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے اور کسی نقطہ تک بڑھایا جائے  
تو سطح اس کل خط استقیم جو بڑھایا نہیں بنا ہی اور بڑھے ہوئے حصہ کی اور اس خط مستقیم  
اوسے برابر مرن جو دو برابر حصوں میں تقسیم ہوا ہی ملکر برابر ہو گے اس خط مستقیم پر کے مرن کے  
جو آدھے خط اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنا ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں نقطہ سے پر تقسیم ہوا ہی اور نقطہ د  
تک بڑھایا گیا ہی تو سطح ادا اور د ب  
کی اور مرن سے ب پر کا ملکر برابر ہو گئی م  
س د پر کے مرن سے

س د پر مرن سے ی ف د بناؤ  
اور دی لکھاؤ

نقطہ ب سے ا ج متوازی س ی یا د ف کا اور دی سے نقطہ ہ پر  
اور ی ف سے نقطہ ج پر ملتا ہوا کھینچو اور نقطہ ک سے ل م متوازی ا د  
یا ی ف کا اور د سے نقطہ م پر اور س ی سے نقطہ ل پر ملتا ہوا کھینچو  
اور نقطہ ا سے ا ک متوازی س ل یا د م کا اور ل کے نقطہ پ پر ملتا ہوا کھینچو شکل ۱۲ مقالہ

جو کہ اس برابر ہی س ب کے

اسلئے قائم الزاویہ ال برابر ہی قائم الزاویہ س د کے

لیکن س د برابر د ف کے ہی

شکل ۱۲ مقالہ

شکل ۱۳ مقالہ

اسلئے ال برابر ہی ہونے کے

ان دونوں برابرین سے ہر ایک میں سے م ملا دیا

اسلئے کل ام برابر ہی علم میں م ج کے

علوم متعارفہ مقالہ

لیکن ام ہی سطح اد اور دب کی کیونکہ دم برابر ہی دب کے نتیجہ میں شکل متقابلہ

اسلئے علم میں م ج برابر ہی سطح اد اور دب کے

ان دونوں برابرین سے ہر ایک میں ل ج جو س ب پر کا مربع ہی ملایا

اسلئے سطح اد اور دب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہی علم میں م ج

علوم متعارفہ مقالہ

اور شکل ل ج کے مجموعہ کے

لیکن علم میں م ج اور شکل ل ج ملکر شکل سی ف جو س ب پر کا مربع

ہی بناتے ہیں

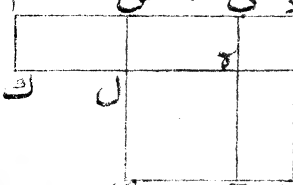
اسلئے سطح اد اور دب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہی س د پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم لے۔ یہی ثابت کرنا تھا

چھٹی شکل کا دوسرا ثبوت یہ ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں نقطہ میں تقسیم ہوا ہی اور نقطہ تک بڑھایا گیا ہے

تو سطح اد اور دب کی اور س ب پر کا مربع ملکر برابر ہو گئے س د پر کے مربع کے



س د پر مربع سی ف بناؤ شکل ۳۴ مقالہ

ب ج متوازی سی کا کھینچو شکل ۳۵ مقالہ

اور ب د برابر د کے بناؤ

ب سے ک ل م متوازی اد کا کھینچو اور اسے ک متوازی سی کا کھینچو شکل ۳۶ مقالہ

اب چونکہ ب ج برابر ہی س د کے اور ب د برابر د کے

اسلئے ل ج برابر ہی س ب کے

علوم متعارفہ مقالہ

اسلئے قائم الزاویہ ج برابر ہی قائم الزاویہ میں لا کے  
لیکن میں ہ برابر ہی ا ل کے کیونکہ میں ب برابر ہی ا س کے  
اسلئے م ج برابر ہی ا ل کے

ان دونوں برابر میں ت ہر ایک میں میں م اور ل ج ملایا  
اسلئے ام اور ل ج ملکر برابر میں میں م اور م ج اور ل ج کے مجموعہ کے  
لیکن ام ہی سطح ا د اور د ب کی کیونکہ د م برابر ہی د ب کے اور ل ج ہی مربع میں ب  
پر کا اور میں م اور م ج اور ل ج ملکر شکل میں ی ت د کو جو د پر کا مربع ہی بناتے ہیں  
اسلئے سطح ا د اور د ب کی اور میں ب پر کا مربع ملکر برابر میں میں د پر کے مربع کے  
اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
چھٹی شکل کا یہ ثبوت یہہ ہی

فرض کرو کہ اب دو برابر متوازی نقطہ میں ہر تقسیم ہوا ہے اور نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے  
تو سطح ا د اور د ب کی اور میں ب پر کا مربع ملکر برابر ہو گئے میں د پر کے مربع کے  
میں ا کو ن تک بڑھاؤ اور میں ن د ب میں ا ن  
برابر میں د کے بناؤ

چونکہ میں ن برابر ہی میں د کے اور میں ب برابر ہی میں ا کے  
اسلئے کل ن ب برابر ہی کل د ا کے  
اب چونکہ سطح ن ب اور ب د کی اور میں ب پر کا مربع ملکر برابر میں میں د پر کے مربع کے  
(شکل ۷ مقالہ ۲) اور ا د برابر ن ب کے ثابت ہو چکا ہے  
اسلئے سطح ا د اور د ب کی اور میں ب پر کا مربع ملکر برابر میں میں د پر کے مربع کے  
اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
ثبوت چہرہ



فرض کہ اب طول میں ۲ پیمانہ اور اسکا ادھا اس یا سب طول میں ۱ پیمانہ اور ب  
طول میں ۱ پیمانہ ہو

تو ا د طول میں  $(۱۲ + م)$  پیمانہ ہو

اسکے  $(۱۲ + م) \times م = ۲ \times ۱ \times م + م^۲$   
ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں ۱ ملا دیا

اسکے  $(۱۲ + م) \times م = ۱ + ۲ \times ۱ \times م + م^۲$

لیکن  $۱ + ۲ \times ۱ \times م + م^۲ = (م + ۱)^۲$

اسکے  $(۱۲ + م) \times م = ۱ + م^۲ = (م + ۱)^۲$

یعنی اگر کوئی عدد دوا بر حصوں میں تقسیم کیا جائے اور اگر کوئی دوسرا عدد پہلے کل عدد اور

اسکے ایک حصہ میں ملا دیا جائے تو حاصل ضرب دونوں عددوں کے حاصل جمع اور دوسرے

عدد کا اور پہلے عدد کے آدھے کا مربع ملکر برابر ہیں اس عدد کے مربع کے جو پہلے عدد کے آدھے اور

دوسرے عدد کے مجموعہ سے بنا ہوا ہے

چھٹی شکل کے پہلے نوٹ کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ سطح ا د اور ب کی برابری علم میں آج

لیکن علم میں آج شکوں میں ت اور ل ج کا جو اس اور س د پر کے مربع ہیں فرق ہی اگر

اس اور س د جدا جدا خط خیال کئے جائیں تو ا د دونوں خط اس اور س د کا مجموعہ ہوا

د ب ان دونوں خطوں کا فرق ہی اور اسکے نتیجہ میں جو ا ب پر کی شکل کی شرح میں لکھ چکے ہیں

چھٹی شکل سے بھی ثابت ہے کہ کسی دو خط کے مجموعہ اور ان کے فرق کی سطح برابر ہیں ان دونوں خطوں

کے مربعوں کے فرق کے

پانچویں اور چھٹی شکل کے دعویٰ ایک ہی دعویٰ ہیں اس طرح سے بیان ہو سکتے ہیں کہ سطح

دو خط بستقیم کی اور ان خطوں کے فرق کے آدھے پر کا مربع ملکر برابر ہوتا ہے اس میں

کے جو ان خطوں کے مجموعہ کے آدھے پر بنایا جائے

## مشق

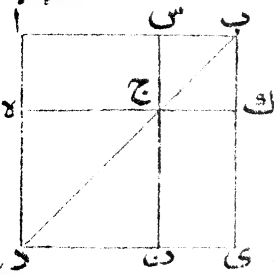
۱ اب س نشان مساوی الساقین ہی اور د قاعدہ اب پر یا اسکے بڑھے ہوئے حصہ پر ایک نقطہ ہی ثابت کرو کہ سطح اد اور دب کی برابر ہی اس اور س د پر کے مربعوں کے فرق کے  
۲ اب اور س د اوری ت ایسے تین خط مستقیم ہیں کہ اب اور س د کا فرق برابر ہی س د اوری ت کے فرق کے ثابت کرو کہ سطح اب اور اوری ت کی اور اب اور س د کے فرق پر کا مربع ملکر برابر ہیں س د پر کے مربع کے

۳ کسی خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ سطح مکمل خط بڑھے ہوگا اور اسکے بڑھے ہوئے حصہ کی برابر ہو جائے گی

## ثباتی شکل

اگر کوئی خط مستقیم کسی دو حصہ میں تقسیم کیا جائے تو مکمل خط مستقیم اور اسکے ایک حصہ پر کے مربع ملکر برابر ہو گئے کل خط مستقیم اور اسی حصہ کی سطح کے دوے اور دوسرے حصہ پر کے مربع کے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصہ میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہی تو اب اور س پر کے مربع ملکر برابر ہو گئے سطح اب اور ب س کی دو فی اور اس پر مربع کے



اب پر مربع ادی ب بناؤ شکل ۴۶ مقالہ

اور ب د ملاؤ

س سے س ت متوازی ادیابی کا

اور ب د سے ج پ اور دی سے ف پ ملتا ہوا لکھیو

اور ج سے ل ج متوازی ابیادی کا اور ا د سے ل پ اور ب ی سے ل پ

ملتا ہوا لکھیو

شکل ۴۷ مقالہ

اب جو کہ ا ج برابر ہی ج ی کے

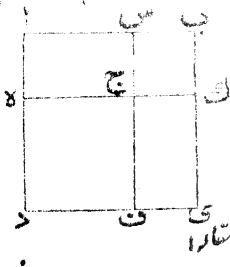
اور ان دونوں برابر ہیں سے ہر ایک میں س ل ملایا

اسلئے کل اک برابر ہی گل سی کے  
 اسلئے اک اور سی فی ملکر دوئے ہیں اک کے  
 لیکن اک اور سی فی ملکر علم اک ف اور ب مع سی ک ہیں  
 اسلئے علم اک ف اور ب مع سی ک ملکر دوئے ہیں اک کے  
 لیکن اب اور ب سی کی سطح کی دونی بھی دونی ہی اک کی کیونکہ ب اک برابر  
 ہے ب سی کے

اسلئے علم اک ف اور ب مع سی ک ملکر برابر ہیں اب اور ب سی کی سطح کے دونے  
 ان دونوں برابر ہیں سے ہر ایک میں ک ف جو اس پر کا ب مع سی ملایا  
 اسلئے علم اک ف اور ب مع سی ک اور ک ف ملکر برابر ہیں اب اور ب سی کی  
 سطح کے دونے اور اس پر کے ب مع کے  
 لیکن علم اک ف اور ب مع سی ک اور ک ف ملکر شکلوں ادی ب اور ک  
 کو جواب اور ب سی پر کے ب مع ہیں بناتے ہیں  
 اسلئے اب اور ب سی پر کے ب مع ملکر برابر ہیں اب اور ب سی کی سطح کے  
 دونے اور اس پر کے ب مع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم لے - یہی ثابت کرنا تھا  
 ساتویں شکل کا دوسرا ثبوت یہ بھی

فرض کرو کہ اب کسی دو حصوں میں نقطہ میں پر تقسیم ہو جائے اب اور ب سی پر کے ب مع ملکر برابر  
 ہیں اب اور ب سی کی سطح کے دونے اور اس پر کے ب مع کے  
 اب پر ب مع ادی ب بناؤ شکل ۴۴ مقالہ  
 ادی میں سے اہ برابر ب سی کے کاٹو  
 سی ف متوازی ادا کا اور ک متوازی اب کا کیونکہ شکل ۴۴ متساوی



اب ہت ہی مربع اس کا اور س ک ہی مربع س ب پر کا  
 چونکہ اب اور ب س پر کے مربع برابر ہیں ای اور س کے  
 اور ای اور س ک برابر ہیں ا ک اور ہت اور س ی کے  
 اسلئے اب اور ب س پر کے مربع برابر ہیں ا ک اور س ی اور ہت کے  
 لیکن ا ک ہی سطح اب اور ب س کی کیونکہ ب ک برابر ہی ب س کے اور س ی ہی سطح اب  
 اور ب س کی کیونکہ ب ی برابر ہی اب کے اور ہت مربع اس پر کا ہی  
 اسلئے اب اور ب س پر کے مربع ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور اس  
 پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم ا ب - یہی ثابت کرنا تھا  
 ساتویں شکل کا تیسرا ثبوت یہ بھی  
 فرض کرو کہ اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہے تو اب اور ب س پر کے مربع ملکر  
 برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور اس پر کے مربع کے  $\text{ب س}$   
 چونکہ اب اور ب س کی سطح برابر ہی اس اور ب س کی سطح اور ب س پر کے مربع کے شکل ۳ مقالہ  
 اسلئے اب اور ب س کی سطح کا دونا برابر ہی اس اور ب س کی سطح کے دونے اور اس پر  
 کے مربع کے دونے کے

ان دونوں برابر ہیں سے ہر ایک میں اس پر کا مربع ملایا  
 اسلئے اب اور ب س کی سطح کا دونا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اس اور ب س کی  
 سطح کے دونے اور اس پر کے مربع کے دونے اور اس پر کے مربع کے  
 لیکن اس اور ب س کی سطح کا دونا اور ب س پر کے مربع ملکر برابر ہیں اب  
 پر کے مربع کے شکل ۴ مقالہ  
 اسلئے اب اور ب س پر کے مربع ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے اور

اس پر کے مربع کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبر

فرض کرو کہ اب طول میں ا پیمانہ ہو اور اسکے حصے اس اور س ب طول میں ترتیب

م اور ن پیمانہ ہیں

$$تو ۱ = م + ن$$

ان دونوں برابر کا مربع کیا

$$اسلئے ۱^۲ = م^۲ + ۲ \times م \times ن + ن^۲$$

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں ن اٹلایا

$$اسلئے ۱^۲ + ن^۲ = م^۲ + ۲ \times م \times ن + ن^۲ + ن^۲$$

$$لیکن ۲ \times م \times ن + ن^۲ = ۲ \times ن \times (م + ن) = ۲ \times ن \times ۱$$

$$اسلئے ۱^۲ + ن^۲ = م^۲ + ۲ \times ن \times ۱$$

یعنی اگر کوئی عدد کسی دو حصوں میں تقسیم ہو تو کل عدد اور ایک حصہ کے مربع کے برابر ہیں

اور اس حصہ کے حاصل ضرب کے دو حصے اور دوسرے حصہ کے مربع کے

اگر اب اور ب س دو جدا جدا خط خیال کئے جائیں تو اس خط اب اور ب س کا فرق

جو اور اسلئے ساتویں شکل کا دعویٰ اس طرح بھی بیان ہو سکتا ہے کہ دو خطوں کے مربع کے برابر ہیں

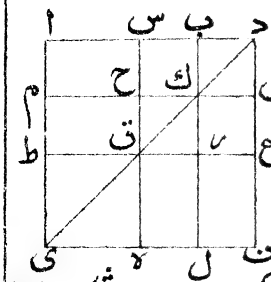
ان خطوں کی سطح کے دو حصے اور ان خطوں کے فرق پر کے مربع کے

شکل ۸ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم کسی دو حصوں میں تقسیم کیا جائے تو کل خط اور اسکے کسی ایک

حصہ کی سطح کا جو گنا اور دوسرے حصہ پر کا مربع برابر ہو گئے اس خط مستقیم پر کے مربع

کے جو کل خط اور پہلے حصہ سے بنتا ہے



شکل ۳۳ مقالہ

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی حصہ میں  
نقطہ میں تقسیم ہوا ہے تو اب اور ب س کی سطح  
کا جو گنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہو گئے اس خط  
پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنتا ہے  
اب کو د تک اتنا بڑھاؤ کہ ب د برابر ہو س ب کے

اد پر مربع ای ف د بناؤ (شکل ۳۴ مقالہ) اور دی ملاؤ

ب اور س سے ب ل اور س ل متوازی ای یاد دے کے اور دی سے

نقطوں ك اور ق پر اور ی ف سے نقطوں ل اور د پر ملتے ہوئے کھینچو

ك اور ق سے م ج ك ن اور ط ق س ع متوازی اد بای ف کے کھینچو

اب چونکہ س ب برابر ہے ب د اور س ل برابر ہے ل کے اور ب برابر ل ن کے

اسلئے ج ك برابر ہے ل ن کے

اور ایسی ہی دلیل سے ق س برابر ہے س ع کے

چونکہ س ب برابر ہے ب د کے اور ج ك برابر ل ن کے

اسلئے قائم الزاویہ س ك برابر ہے قائم الزاویہ ب ن کے اور قائم الزاویہ ج

شکل ۳۵ مقالہ

برابر س ن کے

شکل ۳۶ مقالہ

لیکن س ك برابر ہے س ن کے

اسلئے ب ن بھی برابر ہے ج س کے

اسلئے چاروں قائم الزاویہ ب ن اور س ك اور ج س اور س ن آپس میں

برابر ہیں اور چاروں ٹکڑے کسی ایک س ك کا جو گنا ہیں

چونکہ س ب برابر ہے ب د اور ب د برابر ل ك کے یعنی برابر س ج کے

اور چونکہ س ب برابر ہے ج ك یعنی برابر ج ق کے

۱۔ اسلئے س ج برابر ہی ج ق کے

جو کہ س ج برابر ہی ج ق کے اور ق س برابر س ج کے

اسلئے قائم الزاویہ ا ج برابر ہی ق کے اور ق ل برابر س ق کے شکل ۳۳ متقابل

لیکن ق برابر ہی ق ل کے

اسلئے ا ج برابر ہی س ق کے

اسلئے چاروں قائم الزاویہ ا ج اور ق اور ق ل اور س ق آجسب برابر ہیں

اور چاروں ملکر کسی ایک ا ج کا چوگنا ہیں

اور یہ ثابت ہو چکا ہے کہ چاروں قائم الزاویہ س ق اور س ل اور ج س

اور س ن ملکر س ل کا چوگنا ہیں

اسلئے آٹھوں قائم الزاویہ جن سے علم ا ج بنا ہوا ہے کا چوگنا ہیں

جو کہ ا ل ہی سطح اب اور س کی کیونکہ ب ل برابر ہی ب س کے

اسلئے اب اور س کی سطح کا چوگنا ا ل کا چوگنا ہو

لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ علم ا ج کا چوگنا ا ل کا ہے

اسلئے اب اور س کی سطح کا چوگنا برابر ہی علم ا ج کے علم متعارفہ متقابل

ان دونوں برابر ہیں سے ہر ایک میں طہ ا ج اس پر کامل ہے ملا دیا

اسلئے اب اور س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کامل ملکر برابر ہیں علم

ا ج اور ب ج طہ کے

لیکن علم ا ج اور ب ج طہ ملکر شکل ای ف د کو جو ا د پر کامل ہے بناتے ہیں

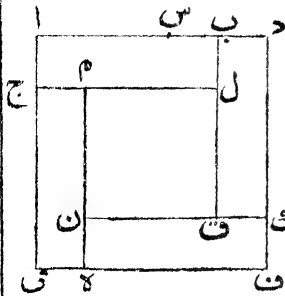
اسلئے اب اور س کی سطح کا چوگنا اور اس پر کامل ملکر برابر ہیں ا د پر کے

ب ج کے یعنی اس خط پر کے ب ج کے جو اب اور س سے بنا ہے

اسلئے اگر کوئی خط درست قیمنہ ہے یہی ثابت کرنا تھا

آپس میں شکل کا دو سرانہوت یہ ہے

نہیں کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ میں پر تقسیم ہوا ہو تو اب اور ب سے کسی  
سطح کا چوگنا اور اس پر کا بلع ملکر برابر ہیں اس خط مستقیم پر کے بلع کے جواب اور ب سے



بتا ہی

اب کو تک اتنا بڑھاؤ کہ ب د برابر ہو ب سے کے

اد پر بلع ای ف د بناؤ

ای میں سے ا ج اور ی ف میں سے ی کا اور ک

ف د میں سے ف ک برابر ہو ب سے کے کاٹو

ج ل متوازی ادا کا اور م متوازی ای کا اور ک ن متوازی ی ف کا اور ج ق

شکل ۳۱

متوازی د ف کا کھینچو

چ کہ ادا اور ای اور ی ف اور د آپس میں برابر ہیں اور ا ج اور ی کا اور ف ک

اور د آپس میں برابر ہیں

علم و تمنا

اسلئے اب اور ج ی اور د ف اور ک د آپس میں برابر ہیں

شکل ۳۲

اسلئے قائم الزاویہ ال اوج کا اور ک اور ک ب آپس میں برابر ہیں

اور چاروں ملکر کسی ایک ال کا چوگنا ہیں

لیکن اب اور ب سے کی سطح کا چوگنا بھی ال کا چوگنا ہے کیونکہ ب ل برابر ہیں ب سے کے

اسلئے قائم الزاویہ ال اوج کا اور د ک اور ک ب ملکر برابر ہیں اب اور ب سے کے

کی سطح کے چوگنے کے

بھر چو کہ ج ل اور م کا اور ف ک اور ب آپس میں برابر ہیں کیونکہ ہر ایک برابر ہے اب کے

اور ج م اور د ن اور ک ق اور ب ل آپس میں برابر ہیں کیونکہ ہر ایک برابر ہے ب سے کے

اسلئے ل م اور د ن اور ق اور ک ل اور ا س آپس میں برابر ہیں



اسلئے قائم الزاویہ میں قیاسی سطح اس پر کاہی

لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ قائم الزاویہ ال اور ج ۴ اور ۴ ک اور ک ب ملکر برابر ہیں سطح  
اب اور ب س کے چوگئے کے

اسلئے پانچوں قائم الزاویہ ال اور ج ۴ اور ۴ ک اور ک ب اور ق ملکر برابر ہیں اب  
اور ب س کی سطح کے چوگئے کے اور اس پر کے مربع کے

لیکن یہ پانچوں قائم الزاویہ ملکر شکل ا د ی ف کو جو اد پر کا مربع ہی بناتے ہیں  
اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگئے اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہی اد پر کے مربع کے  
یعنی اس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنائے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - بھی ثابت کرنا تھا  
آٹھویں شکل کا تیسرا ثبوت یہ ہے

فرض کرو کہ اب کسی دو حصوں میں نقطہ میں تقسیم ہو اسی تو اب اور ب س کی سطح کا  
چوگئے اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اس خط مستقیم پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنائے  
اب کو ذمہ آتا بڑھاؤ کہ ب برابر ہو ب س کے  
چونکہ اب اور ب س کی سطح برابر ہی اس اور ب کی سطح اور ب ب پر کے  
مربع کے

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگئے برابر ہی اس اور ب کی سطح کے چوگئے  
اور ب ب پر کے مربع کے چوگئے کے

لیکن اس اور ب کی سطح کا چوگئے برابر ہی اس اور ب کی سطح کے دہنے کے  
اور ب ب پر کے مربع کا چوگئے برابر ہی اس پر کے مربع کے کیونکہ ب ب آدھا ہی اس دہ  
اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوگئے برابر ہی اس اور ب کی سطح کے دونوں اور  
س پر کے مربع کے

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں اس پر کا مربع ملا دیا  
اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوکنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اس اور س د  
کی سطح کے دونے اور اس اور س د پر کے مربعوں کے  
لیکن اس اور س د کی سطح کا دو نا اور اس اور س د پر کے مربع ملکر برابر ہیں اد پر کے  
مربع کے

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوکنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اد پر کے مربع کے  
یعنی اس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنائے  
اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ۔ یہی ثابت کرتا تھا  
جو تھا طریقہ آٹھویں شکل کے ثابت کرنا تھا یہ ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب کسی دو حصوں میں نقطہ س پر تقسیم ہوا ہے تو اب اور ب س کی  
سطح کا چوکنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنائے  
اب کو ذکاتنا بڑھاؤ کہ ب د برابر ہو اب س کے د ب س  
چونکہ اب اور ب د کی سطح کا دو نا اور اب اور ب د پر کے مربع ملکر برابر ہیں اد پر کے  
مربع کے

لیکن ب د برابر ہے ب س کے  
اسلئے اب اور ب س کی سطح کا دو نا اور اب اور ب س پر کے مربع ملکر برابر ہیں  
اد پر کے مربع کے

لیکن اب اور ب س پر کے مربع ملکر برابر ہیں اب اور ب س کی سطح کے دونے  
اور اس پر کے مربع کے

اسلئے اب اور ب س کی سطح کا چوکنا اور اس پر کا مربع ملکر برابر ہیں اد پر کے مربع کے  
یعنی اس خط پر کے مربع کے جو اب اور ب س سے بنائے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا  
تہوت جبر یہ

فرض کر دو خط اب طول میں اپجائے اور اسکے حصے اس اور میں ب طول میں ترتیب ار

م اور ن پیمانہ ہیں

$$\text{تو } م + ن = ۱$$

ان دونوں برابر میں سے ن نکالا

$$\text{اسلئے } م = ۱ - ن$$

ان دونوں برابر کا مربع کیا

$$\text{اسلئے } م^۲ = (۱ - ن)^۲ = ۱ - ۲ن + ن^۲$$

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں  $۴ \times ۱ \times م$  ملایا

$$\text{اسلئے } ۴ \times ۱ \times م + م^۲ = ۴ \times ۱ \times م + (۱ - ۲ن + ن^۲)$$

$$\text{لیکن } ۴ \times ۱ \times م + م^۲ = ۴ \times ۱ \times م + (۱ - ۲ن + ن^۲)$$

$$\text{اسلئے } ۴ \times ۱ \times م + م^۲ = ۴ \times ۱ \times م + (۱ - ۲ن + ن^۲)$$

یعنی اگر کوئی عدد دو حصوں میں تقسیم ہو تو مکمل عدد اور اسکے ایک حصہ کے حاصل ضرب کا چوگنا

اور دوسرے حصہ کا مربع ملکر برابر میں اس عدد کے مربع کے جوکل عدد اور اسکے پہلے حصہ سے بنا ہوتی

اگر اب اور ب سے جدا خط خیال کئے جائیں تو آٹھویں شکل کے دعویٰ کی یہ صورت

ہوگی کہ دو خط مستقیم کی سطح کا چوگنا اور ان کے فرق پر کا مربع ملکر برابر ہو گئے ان خطوں کے

مجھوہ پر کے مربع کے

## شکل ۹ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو برابر اور دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو دونوں برابر

حصوں پر کے مربعات ملکر دو گنے ہوتے ہیں آدھے خط پر کے مربع اور اس خط پر کے مربع سے

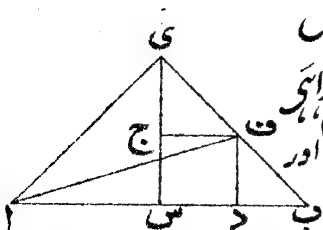
جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں

نقطہ سے پر اور دو برابر حصوں میں نقطہ پر تقسیم ہوا ہے

تو ادا اور دب بر کے مربیعے ملکر دو نئے ہیں اس اور

س دب کے مربیعوں کے



س سے سی خط اب کے ساتھ زاویے قائمہ بنا تا ہوا کھینچو (شکل ۱۱ مقلدا)

سی برابر اس یا س جب کے بناؤ (شکل ۱۲ مقلدا) اور سی اور سی ب ملاؤ

د سے د ف متوازی سی کا اور سی ب سے ف پر ملتا ہوا کھینچو اور ف سے

ف ج متوازی اب کا کھینچو (شکل ۱۳ مقلدا) اور ا ف ملاؤ

اب چونکہ اس برابر سی سی کے

اسلئے زاویہ ای سی برابر ہے زاویہ سی اس کے

چونکہ زاویہ اس سی قائمہ ہے

اسلئے زاویہ ای سی اور سی اس ملکر برابر ایک قائمہ کے ہیں (شکل ۱۴ مقلدا)

اور چونکہ یہ دونوں زاویے آپس میں برابر ہیں اسلئے ہر ایک انیس سے آدھا قائمہ ہے

ایسی ہی دلیل سے زاویوں سی سی اور سی ب سی سے ہر ایک

آدھا قائمہ ہے

اور اسلئے شکل زاویہ ای ب قائمہ ہے

چونکہ زاویہ ج سی ف آدھا قائمہ ہے اور زاویہ سی ج ف قائمہ ہے کیونکہ وہ برابر

ہونے سامنے کے زاویہ داخلہ سی ب کے (شکل ۱۵ مقلدا)

اسلئے زاویہ سی ج ف آدھا قائمہ ہے

اسلئے زاویہ ج سی ف برابر ہے زاویہ سی ج کے

اسلئے ضلع ج ف برابر ہی ضلع ج ی کے  
 پھر جو کہ زاویہ ب د آدھا قائمہ ہی اور زاویہ ف د ب قائمہ ہی کیونکہ وہ  
 برابر ہی اپنے سامنے کے زاویہ داخلہ ی س ج کے  
 اسلئے زاویہ ب ف د آدھا قائمہ ہی  
 اسلئے زاویہ ف ب د برابر ہی زاویہ ب ف د کے  
 اسلئے ضلع د ف برابر ہی ضلع د ب کے  
 چونکہ اس برابر ہی سی کے  
 اسلئے اس پر کا مربع برابر ہی سی ی پر کے مربع کے  
 اسلئے اس اور سی ی پر کے مربعے ملکر دوئے ہیں اس کے مربع کے  
 لیکن ای پر کا مربع برابر ہی اس اور سی ی پر کے مربعوں کے  
 اسلئے ای پر کا مربع دو ناہی اس پر کے مربع کا  
 پھر جو کہ ی ج برابر ہی ج ف کے  
 اسلئے ی ج پر کا مربع برابر ہی ج ف پر کے مربع کے  
 اسلئے ی ج اور ج ف پر کے مربعے ملکر دوئے ہیں ج ف پر کے مربع کے  
 لیکن ی ف پر کا مربع برابر ہی ج اور ج ف پر کے مربعوں کے  
 اسلئے ی ف پر کا مربع دو ناہی ج ف پر کے مربع کا  
 لیکن ج ف برابر ہی س د کے  
 اسلئے ی ف پر کا مربع دو ناہی س د پر کے مربع کا  
 لیکن ای پر کا مربع دو ناہی اس پر کے مربع کا  
 اسلئے ای اور ی ف پر کے مربعے ملکر دوئے ہیں اس اور س د پر کے  
 مربعوں کے

شکل ۶ مقالہ

شکل ۷ مقالہ

شکل ۸ مقالہ

مقالہ

شکل ۹ مقالہ

شکل ۱۰ مقالہ

لیکن اف پر کا مربع برابر ہی ای اور جی ف پر کے مربعوں کے  
 اسلئے اف پر کا مربع دو نا ہی اس اور سی د پر کے مربعوں کا  
 لیکن ادا اور دت پر کے مربعے ملکر برابر ہیں اف پر کے مربع کے  
 اسلئے ادا اور دت پر کے مربعے ملکر دو نئے ہیں اس اور سی د پر کے مربعوں کے  
 لیکن دت برابر ہی د ب کے  
 اسلئے ادا اور د ب پر کے مربعے ملکر دو نئے ہیں اس اور سی د پر کے مربعوں کے  
 اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا  
 نویں شکل کا دوسرا ثبوت یہہ ہی

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں نقطہ سی پر ادا و دونا برابر حصوں میں نقطہ د پر تقسیم ہوا  
 ہی تو ادا و د ب پر کے مربعے ملکر دو نئے ہو گئے اس اور سی د پر کے مربعوں کے  
 چونکہ ادا پر کا مربع برابر ہی اس اور سی د کی سطح کے دو نئے اور اس اور سی د پر کے مربعوں کے  
 کے (شکل ۴ مقالہ ۲) او ب سی اور سی د کی سطح کا دونا اور د ب پر کا مربع ملکر برابر ہی ہیں  
 اور سی د پر کے مربعوں کے  
 شکل ۴ مقالہ ۲

اسلئے ادا اور د ب پر کے مربعے او ب سی اور سی د کی سطح کا دونا ملکر برابر ہیں اس اور سی د  
 کی سطح کے دو نئے اور سی د پر کے مربع کے دو نئے اور اس اور سی د پر کے مربعوں کے  
 لیکن ب سی برابر ہی اس کے

اسلئے ادا اور د ب پر کے مربعے اور اس اور سی د کی سطح کا دونا ملکر برابر ہیں اس اور سی د  
 کی سطح کے دو نئے اور اس اور سی د پر کے مربعوں کے دو نئے کے

ان دونوں برابر ہیں سے اس اور سی د کی سطح کا دونا نکال ڈالو  
 اسلئے ادا اور د ب پر کے مربعے دو نئے ہیں اس اور سی د پر کے مربعوں کے  
 اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

## ثبوت جبرہ

فرض کرو کہ خط اب طول میں ۲ پیمانہ اور اسکا آدھا اس یا سب طول میں ۱ پیمانہ  
اور خط س د جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان قطع ہو م پیمانہ ہو

تو ا د طول میں (۱+م) پیمانہ ہو اور د ب طول میں (۱-م) پیمانہ ہو

$$\text{اب } (۱+م)^۲ = ۱^۲ + ۲ \times ۱ \times م + م^۲$$

$$\text{اور } (۱-م)^۲ = ۱^۲ - ۲ \times ۱ \times م + م^۲$$

$$\text{اسلئے } (۱+م)^۲ + (۱-م)^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ + م^۲ + م^۲$$

یعنی اگر کوئی عدد دو برابر حصوں میں اور دو برابر حصوں میں تقسیم ہو تو دونوں برابر حصوں کے

مربعے ملکر دوئے ہیں آدھے عدد کے مربع اور برابر حصوں کے فرق کے آدھے کے مربع سے

نویں شکل میں ثابت ہوا کہ دو برابر حصوں ا د اور د ب پر کے مربعے ملکر دوئے ہیں اس اور

س د کے مربعوں سے یعنی برابر ہیں اس اور س ب پر کے مربعوں اور س د پر کے مربع کے دوئے

کے اسلئے دو برابر حصوں اس اور س ب پر کے مربعے ملکر دو برابر حصوں ا د اور د ب پر

مربعوں سے ہمیشہ چھوٹے ہیں اسلئے اس شکل سے یہ نتیجہ صیح ثابت ہوا کہ کسی خط است قیسم کے

دو حصوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس صورت میں انتہا درجہ کا چھوٹا ہوگا جب تقسیم کا نقطہ بہت قیسم

کے آدھے پر ہو

## مشق

۱ مثلث اب س میں خط ا د زاویہ ا سے ب س کو نقطہ د پر دو برابر حصوں میں کاٹتا ہوا

کھینچا گیا ہی ثابت کرو کہ ب ا اور اس پر کے مربعے ملکر دوئے ہیں ب د اور ا د پر کے مربعوں کے

۲ ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع کے چاروں ضاعوں کے مربعے ملکر برابر ہوں گے اسکے دونوں

قطر پر کے مربعوں کے

۳ کسی نقطہ سے کسی قائم الزاویہ ب س دی کی چاروں زاویوں تک خط اب اور اس

اور ادا راہی کھینچ گئے ہیں ثابت کرو کہ اب اور ادا پر کے مربع ملکر برابر ہیں اس اور ادا پر کے مربعوں کے

۴ ذوالرباعۃ الاضلاع اب سے د کے قطر اس اور ب کے بیچوں بیچ کے نقطہ سی اور ف میں ثابت کرو کہ چاروں ضلعوں پر کے مربع ملکر برابر ہیں دونوں قطروں پر کے مربعوں کے اور سی ف پر کے مربع کے جو گئے کے

۵ کسی خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ دونوں حصوں پر کے مربع ملکر برابر ہوں دیے ہوئے مربع کے اور بتاؤ کہ کس صورت میں اس شکل کا حل ہونا ناممکن ہوگا

### شکل ۱۱ اثباتی

اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے اور کسی نقطہ تک بڑھایا جائے تو کل خط مستقیم بڑھے ہوئے پر کا مربع اور بڑھے ہوئے حصہ پر کا مربع ملکر دو نئے ہو گئے آدھے خط مستقیم پر کے مربع اور اس خط پر گئے مربع کے جو آدھے خط اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنتا ہے

فرض کرو کہ خط مستقیم اب دو برابر حصوں میں نقطہ میں تقسیم ہوا ہے اور نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے تو ادا اور دب پر گئے مربع ملکر دو نئے ہو گئے اس اور سی د پر کے مربعوں کے

نقطہ سی سے سی خط اب کے ف ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہوا کھینچو شکل ۱۱ نقل اور سی برابر اس یا سی ب کے بناؤ اور ادا اور سی ب ملاؤ

ی سے سی ف متوازی اب کا کھینچو اور د سے د ف متوازی سی کا اور سی ف سے نقطہ ف پر ملتا ہوا کھینچو شکل ۱۱ نقل

اب چونکہ سی ف د متوازی خطی سی اور د پر گرتا ہے



اسلئے زاویے سی سی ف اور سی ف د برابر ہیں دو قائموں کے شکل ۲۹ مقالہ

اسلئے زاویے بی بی ف اور سی ف د دو قائموں سے کم ہیں

اسلئے بی ج اور ف د اگر ب اور د کی طرف بڑھائی جائیں تو ملجائیگی علم خانہ ۱۱ مقالہ

فرض کرو کہ بی ج اور ف د بڑھ کر ج پر ملتے ہیں ا ج ملاؤ

اب چونکہ اس برابر سی سی کے

اسلئے زاویہ سی سی ا برابر ہی اس کے

اور زاویہ اس سی قائمہ ہی

اسلئے زاویوں سی سی ا اور سی سی میں سے ہر ایک آدھا قائمہ ہی شکل ۳۰ مقالہ

ایسی ہی دلیل سے زاویوں سی سی ب اور سی سی میں سے ہر ایک آدھا قائمہ ہی

اسلئے کل زاویہ ای ج قائمہ ہی

چونکہ زاویہ بی ج سی آدھا قائمہ ہی

اسلئے زاویہ د ج بھی آدھا قائمہ ہی شکل ۳۱ مقالہ

لیکن زاویہ ج د ج قائمہ ہی کیونکہ وہ برابر ہی زاویہ قبا دہ سی سی کے شکل ۳۲ مقالہ

اسلئے زاویہ ج د ج آدھا قائمہ ہی اور اسلئے برابر ہی زاویہ د ج ج کے

اسلئے ضلع ج د برابر ہی ضلع د ج کے شکل ۳۳ مقالہ

پھر چونکہ زاویہ ج ف د آدھا قائمہ ہی اور زاویہ سی ف ج قائمہ ہی کیونکہ وہ برابر

ہی زاویہ فی سی د کے

اسلئے زاویہ سی ج آدھا قائمہ ہی اور اسلئے برابر ہی زاویہ سی ج ف کے

اسلئے ضلع ج ف برابر ہی ضلع ف سی کے شکل ۳۴ مقالہ

چونکہ سی سی برابر ہی اس کے

اسلئے سی سی برابر ہی اس کے اولیٰ کے

اسلئے ی میں اور میں اپر کے مربع ملکر دوئے ہیں میں اپر کے مربع کے  
 لیکن میں اپر کا مربع برابر ہی میں اور میں اپر کے مربعوں کے شکل ۴۴ مقالہ  
 اسلئے میں اپر کا مربع دوئے ہیں اس پر کے مربع کا  
 پھر چونکہ ج ف برابر ہی میں کے  
 اسلئے ج ف کا مربع برابر ہی میں پر کے مربع کے  
 اسلئے ج ف اور میں پر کے مربع دوئے ہیں میں پر کے مربع کے  
 لیکن میں ج پر کا مربع برابر ہی ج ف اور میں پر کے مربعوں کے شکل ۴۵ مقالہ  
 اسلئے میں ج پر کا مربع دوئے ہیں میں پر کے مربع کا  
 لیکن میں برابر ہی میں د کے  
 اسلئے میں ج پر کا مربع دوئے ہیں میں د پر کے مربع کا  
 لیکن یہ ثابت ہو چکا ہے کہ میں اپر کا مربع دوئے ہیں اس پر کے مربع کے  
 اسلئے میں اوری ج پر کے مربع ملکر دوئے ہیں اس اور میں د پر کے مربعوں کے  
 لیکن ا ج پر کا مربع برابر ہی اوری ج پر کے مربعوں کے شکل ۴۶ مقالہ  
 اسلئے ا ج پر کا مربع دوئے ہیں اس اور میں د پر کے مربعوں کا  
 لیکن ا د اور ج پر کے مربع ملکر برابر ہیں ا ج پر کے مربع کے شکل ۴۷ مقالہ  
 اسلئے ا د اور ج پر کے مربع ملکر دوئے ہیں اس اور میں د پر کے مربعوں کے  
 لیکن ج برابر ہی د کے  
 اسلئے ا د اور د پر کے مربع ملکر دوئے ہیں اس اور میں د پر کے مربعوں کے  
 اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ۔ یہی ثابت کرنا تھا  
 دوہرے شکل کا دوسرا ثبوت جو ٹھیکہ یسا ہی جیسا نوین شکل کا دوسرا ثبوت ہی  
 فرض کرو کہ خط اب دو برابر حصوں میں نقطہ میں تقسیم ہوا ہے اور نقطہ ذک بڑھایا گیا ہے تو ا د

اور دب پر کے مربع ملکر دوئے ہوں گے اسی اور سی دب کے مربعوں کے

چونکہ اد پر کا مربع برابر ہی اسی اور سی دب سے

کی سطح کے دوئے اور اسی اور سی دب کے مربعوں کے

اور سی اور سی دب کی سطح کا دوئے اور دب پر کا مربع ملکر برابر ہی سی اور سی دب کے مربعوں کے

اسلئے اد اور دب پر کے مربع اور سی اور سی دب کی سطح کا دوئے ملکر برابر ہی سی اور سی

کی سطح کے دوئے اور سی دب کے مربع کے دوئے اور اسی اور سی دب کے مربعوں کے

لیکن جب سی برابر ہی اسی کے

اسلئے اد اور دب پر کے مربع اور اسی اور سی دب کی سطح کا دوئے ملکر برابر ہی اسی اور سی

کی سطح کے دوئے اور اسی اور سی دب کے مربعوں کے دوئے کے

ان دونوں برابر ہیں اسی اور سی دب کی سطح کا دوئے کمال ڈالو

اسلئے اد اور دب پر کے مربع ملکر دوئے ہیں اسی اور سی دب کے مربعوں کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

دسویں شکل کا تیسرا ثبوت یہ ہو

فرض کرو کہ خط مستقیم اد دب پر جزو میں نقطہ سی پر تقسیم ہوا ہو اور نقطہ دنگ بڑھا یا گیا ہو

تو اد اور دب پر کے مربع ملکر دوئے ہوں گے اسی اور سی دب کے مربعوں کے

جب ا کو نقطہ سی تک بڑھاؤ اور ای دب سے

برابر دب کے بناؤ

چونکہ دا اور ای پر کے مربع ملکر دوئے ہیں دس اور سی دب کے مربعوں کے

اور ای برابر ہی دب کے

اسلئے اد اور دب پر کے مربع ملکر دوئے ہیں اسی اور سی دب کے مربعوں کے

اسلئے اگر کوئی خط مستقیم الخ - یہی ثابت کرنا تھا

اگر اس اور میں جدا جدا خط خیال کئے جائیں تو نوں اور سو میں شکل کے دعویٰ ایک ہی دعویٰ میں سطح  
بیاں ہوتے ہیں کہ وہ خط مستقیم کے مجموعہ اور ان کے فرق پر کے مربعے ملکر دو ہیں آج خطوں کے مربعوں کے

### ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ اب طول میں ۱۲ پیمانہ اور اسکا آدھا اس یا س ب طول میں ۱ پیمانہ اور ب د طول  
میں م پیمانہ اسلئے ۱۲ طول میں (۱۲+۱) پیمانہ اور میں د طول میں (۱+۱) پیمانہ ہی

$$\text{چونکہ } (۱۲+۱) \times ۱ = ۱۲ + ۱ \times ۱ = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

$$\text{اسلئے } (۱۲+۱) \times ۱ = ۱۲ + ۱ \times ۱ = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

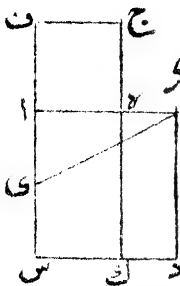
$$\text{لیکن } ۱۲ \times ۱ + ۱ \times ۱ = ۱۲ + ۱ = ۱۳ \text{ اور } ۱۲ + ۱ \times ۱ = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

$$\text{اسلئے } (۱۲+۱) \times ۱ = ۱۲ + ۱ \times ۱ = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

اسلئے اگر کوئی دیا ہوا عدد دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے اور کل عدد میں اور ان کے ایک حصہ میں  
کوئی دوسرا عدد ملایا جائے تو کل عدد جیسے ہوئے اور دوسرے عدد کے مربعے ملکر دو ہیں ایسے ہوتے  
عدد کے آدھے اور اس عدد کے مربعوں سے جو دیے ہوئے عدد کے آدھے اور دوسرے عدد سے بنا ہی

### شکل اعلیٰ

دیے ہوئے خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ کل خط اور ان کے ایک حصہ کی



سطح برابر ہو دوسرے حصہ پر کے مربع کے

فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنا ہی

کہ کل خط اب ان کے ایک حصہ کی سطح برابر ہو دوسرے حصہ پر کے مربع کے

اب ہر مربع اس د ب بناؤ

اس کو دو برابر حصوں میں نقطہ ی تقسیم کرو

ب ی ملاؤ اور سی کو ف تک اتنا بڑھاؤ کہ ی ف برابر ہو ی ب کے

ات ہر مربع ف ج کا بناؤ

تو اب نقطہ ہ پر ایسا تقسیم ہوا کہ اب اور ب کا کی سطح برابر ہوگی ا ہ پر کے مربع

کے ج کا کو بڑھاؤ کہ وہ سی د سے ک پر ملے

اب چونکہ اس دو برابر حصوں میں نقطہ ی تقسیم ہوا ہے اور نقطہ ف تک بڑھایا گیا ہے  
اسلئے س ف اور ف کی سطح اور ای پر کا مربع ملکر برابر ہیں ی ف کے مربع کے شکل ۲ مقالہ ۱

لیکن ی ف برابر ی ب کے ہے

اسلئے س ف اور ف کی سطح اور ای پر کا مربع ملکر برابر ہیں ی ب پر کے مربع کے  
لیکن ب اور ای پر کے مربع ملکر برابر ہیں ی ب پر کے مربع کے شکل ۳ مقالہ ۱

اسلئے س ف اور ف کی سطح اور ای پر کا مربع ملکر برابر ہیں اور ای پر کے مربعوں کے  
ان دونوں برابر ہیں سے مربع ای پر کا نکال ڈالو

اسلئے س ف اور ف کی سطح برابر ہے اب پر کے مربع کے علوم متعارفہ ۲ مقالہ ۱  
لیکن شکل ف کی سطح س ف اور ف کی کیونکہ ف اب پر ف ج کے اور د ہی سطح اب پر  
اسلئے ف اب برابر ہے ا د کے

حقہ ا کی کو جو دونوں میں مشترک ہے نکال ڈالو

اسلئے باقی ف اب برابر ہے باقی ا د کے

لیکن ا د ہی سطح اب اور ب اب کی کیونکہ اب برابر ہے ب د کے

اور ف ا ہی مربع ا ب پر کا

اسلئے اب اور ب ا کی سطح برابر ہے ا ب پر کے مربع کے

اسلئے خط مستقیم اب نقطہ ا پر ایسا تقسیم ہو گیا کہ سطح اب اور ب ا کی برابر ہے

ا ب پر کے مربع کے۔ اسی خط کے اسطور پر تقسیم کرنے کی ضرورت تھی

نتیجہ صریح ۱ اس شکل میں س ف نقطہ ا پر اسی طور پر تقسیم ہوا ہے جیسا اب نقطہ ا پر تقسیم ہوا ہے

نتیجہ صریح ۲ اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصوں میں اس طرح تقسیم ہو کہ سطح کل خط مستقیم اور اس کے چھوٹے

حصہ کی برابر ہو تو بڑے حصہ کے مربع کے توڑا حصہ بھی اسی طور پر تقسیم ہو گا اگر اس میں سے چھوٹے کے برابر حصہ نکال دیا جائے

اور چھوٹا حصہ بھی اسی طور پر تقسیم ہو گا اگر اس چھوٹے حصہ میں سے دونوں حصوں کے فرق کے برابر حصہ نکال دیا جائے

گیارہویں شکل میں اقلیدس نے علم ہندسہ کی رو سے جبر مقابلہ کے دو ستر درجہ کے مساوات

کو حل کیا ہے دو ستر درجہ کے مساوات اور اس شکل کا تقاضا ہے جسے اب تک ہم نہیں ثابت کیا ہے کیونکہ ہاں علم

جس نے جو مقابلہ دوسرے درجہ کے مساوات تک نہیں سیکھا ہی آسکو بخوبی نہیں سمجھ سکتا ہے ۔

### مشق

۱۔ کسی خط مستقیم کو آٹا بڑھاؤ کہ کل خط مستقیم بڑھے ہوئے اور اسکے بڑھنے ہوئے حصہ کی سطح برابر ہو اس خط پر کسی مربع کے

۲۔ کیا جوں شکل میں اگر سی ہ بڑھ کر ب سے نقطہ ل پرے تو زاویہ میں ل ق قائم ہوگا

۳۔ کیا جوں شکل میں اگر سی اور سی ہ نقطہ ع پر ہیں تو ا ع ساتھ میں ہ کے زاویے قائم ہوں گے

۴۔ اگر کوئی خط مستقیم دو حصوں میں اس طرح تقسیم ہو جیسا کہ کیا رہیں شکل میں تقسیم ہوا ہے تو دونوں حصوں کا مجموعہ اور ان کے فرق کی سطح برابر ہوگی دونوں حصوں کی سطح کے

### شکل ۱۱ انتہائی

اگر مثلث منفرج الزاویہ کے کسی زاویہ مادہ سے اس کے سامنے کے ضلع بڑھے ہوئے

عمود ڈالا جائے تو زاویہ منفرجہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع بڑا ہوگا آج دو ضلعوں پر کے

مربعوں سے جتنے زاویہ منفرجہ بنتا ہے بقدر دونی سطح اس ضلع جس کے بڑھے ہوئے حصہ

پر عمود گرائی اور اس خط مستقیم کے جو درمیان عمود اور زاویہ منفرجہ کے واقع ہے

فرض کرو کہ اب اس مثلث منفرج الزاویہ پر جس کا زاویہ اس جاب منفرجہ ہی اور نقطہ

سے ا د عمود ڈالا گیا ہے ضلع ب س بڑھے ہوئے پر

تو اب پر کا مربع بڑا ہوگا اس اور ب س کے مربعوں

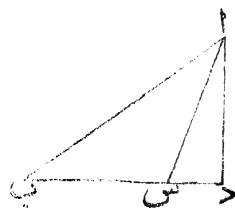
سے بقدر ب س اور س د کی سطح کے دونوں کے

چونکہ یہ ا د دو حصوں میں نقطہ میں پر تقسیم ہوا ہے

اس لیے ب د پر کا مربع برابر ہے ب س اور س د کے مربعوں اور دونی سطح ب

اور س د کے

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں د ا پر کا مربع ملایا



شکل ۱۲ متوالہ

اسلئے جب د اور د اپر کے مرتبہ ملکر برابر ہیں جب س اور سی د اور د اپر کے  
مربعوں اور دوفی سطح جب س اور سی د کے

لیکن جب اپر کا مربع برابر ہو جب د اور د اپر کے مربعوں کے اور سی اپر کا مربع  
برابر ہو سی د اور د اپر کے مربعوں کے

اسلئے جب اپر کا مربع برابر ہو جب س اور سی اپر کے مربعوں اور دوفی سطح جب  
اور سی د کے یعنی جب اپر کا مربع برابر ہو جب س اور سی اپر کے مربعوں سے بقدر  
دوفی سطح جب س اور سی د کے

اسلئے مثلاً منفرج الزاویہ کے لائحہ - یہی ثابت کرنا تھا  
ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ جب س اور سی اور اب طول میں ترتیب دال اور ب اور س پیمانہ میں اور  
سی د اور د ا طول میں ترتیب دارم اور ن پیمانہ میں

تو ب د طول میں (۱+م) پیمانہ ہی

اسلئے س ۱ = (۱+م) ۲ + ن ۱ کیونکہ اب د مثلث قائم الزاویہ ہی

اور ب ۱ = م ۲ + ن ۲ کیونکہ اس د مثلث قائم الزاویہ ہی

اسلئے س ۲ - ب ۱ = (۱+م) ۲ - م ۲

$$= ۱ + ۲م + م ۲ - م ۲ = ۱ + ۲م$$

$$= ۱ + ۲م + م ۲ - م ۲$$

اسلئے س ۲ = ۱ + ب ۱ + م ۲

یعنی س ۱ بڑا ہی ۱ + ب ۱ سے بقدر ۲ × م ۲

منشوق

۱ مثلث اب س کا زاویہ اس جب منفرج ہی اور زاویہ اسے اہ عمود ڈال گیا ہی جب س

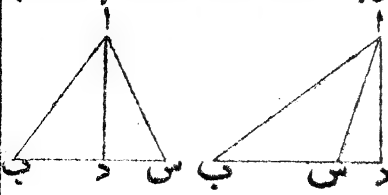
ہوئے پر اور زاویہ ب سے بی عمود ڈالا گیا ہے اس پر سے برابرت کرو کہ اس  
اور سی کی سطح برابر ہے ب سے اور سی کی سطح کے

۲ اب میں مثلث متساوی الاضلاع ہے اسے ا د ایسا خط کھینچا گیا ہے جو ب سے ہر  
ہوئے سے ایسے نقطہ پر ملتا ہے کہ سطح ب د اور د سی کی برابر ہے مثلث اب سی کے کسی ضلع  
پر کے مربع کے ثابت کرو کہ ا د پر کا مربع دونا ہے مثلث اب سی کے کسی ضلع پر کے مربع کا

### شکل ۱۳ اثباتی

کسی مثلث میں کسی زاویہ حادہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع ان دو ضلعوں پر کے  
مربعوں سے جسے وہ زاویہ حادہ بنتا ہے چھوٹا ہوگا بقدر دونی سطح ان ضلعوں میں سے  
کسی ضلع اور اس خط مستقیم کے جو درمیان زاویہ حادہ اور اس عمود کے جو اس ضلع پر  
اس کے سامنے کے زاویہ سے ڈالا گیا ہے واقع ہے

فرض کرو کہ اب میں مثلث ہے اور اس کا زاویہ ب حادہ ہے اور اس کے ضلع ب سے  
یا ضلع ب سے ہر سے ہوئے پر اس کے سامنے کے زاویہ اسے عمود ڈالا گیا ہے تو مربع  
ضلع اس پر کا جو زاویہ ب کے سامنے ہے چھوٹا ہوگا سی ب اور ب ا پر کے مربعوں  
سے بقدر دونی سطح سی ب اور ب د کے



چونکہ میں ب نقطہ د پر اور ب د  
نقطہ میں تقسیم ہوا ہے

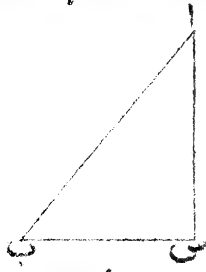
اس لئے سی ب اور ب د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں سی ب اور ب د کی سطح  
کے دونے اور د سی پر کے مربع کے

ان دونوں برابر ہیں سے ہر ایک میں ا د پر کا مربع ملتا  
اس لئے سی ب اور ب د اور د ا پر کے مربعے ملکر برابر ہیں سی ب اور ب د  
کی سطح کے دونے اور ا د اور د سی پر کے مربعوں کے



لیکن ب ا پر کا مربع برابر ہی ب د اور د ا پر کے مربعوں کے اور اس پر کا  
مربع برابر ہی ا د اور د س پر کے مربعوں کے

اس لئے س ب اور ب ا پر کے مربعے ملکر برابر ہیں س ب اور ب د کی سطح  
کے دوئے اور اسی پر مربع کے یعنی اس پر کا مربع چھوٹا ہی س ب اور ب ا پر کے مربعوں  
سے بقدر س ب اور ب د کی سطح کے دوئے کے



شکل ۴۴

اوجیکہ اس عمود ہی ب س پر تو ب س وہ  
خط مستقیم ہی جو زاویہ ب اور عمود کے درمیان واقع ہو  
اور یہ ثابت ظاہر ہو کہ اب اور ب س پر کے مربعے  
ملکر برابر ہیں اس پر کے مربع اور دوئے مربع ب س پر کے  
اس لئے اگر کسی مثلث میں الخ - ہی ثابت کرنا تھا

ثبوت جبریہ

فرض کرو کہ ب س اور س ا اور اب طول میں ترتیب دار ۱ اور ب اور س پیمانہ ہیں

ب د اور ا د طول میں ترتیب وار م اور ن پیمانہ ہیں

(پہلی صورت دیکھو) اب د س طول میں (۱-م) پیمانہ ہی

چونکہ  $۱ = ن + م$  کیونکہ زاویہ ا د ب قائمہ ہی

اور ب ا =  $ن + (۱-م)$  کیونکہ زاویہ ا د س قائمہ ہی

اس لئے س ا - ب ا = م - (۱-م)

$$= م - ۱ + ۱ \times ۲ \times م - م$$

$$= - ۱ + ۲ \times م$$

$$۱ + س ا = ب ا + ۱ \times ۲ \times م$$

یعنی ب ا چھوٹا ہی ۱ + س ا سے بقدر  $۱ \times ۲ \times م$

(دوسری صورت دیکھو) اب دس طول میں (م-۱) پیمانہ ہی

چونکہ  $س = م + ن$  کیونکہ زاویہ ا د ب قائمہ ہی

اور  $ب = (م-۱) + ن$  کیونکہ زاویہ ا د س قائمہ ہی

اسلئے  $س - ب = م - (م-۱)$

$$= م - م + ۱ = ۱$$

$$۱ \times ۲ = م - ۱$$

$$اسلئے ۱ + س = ب + ۱ \times ۲ + م$$

یعنی ب + چھوٹا ہی ۱ + س سے بقدر  $۱ \times ۲ + م$

(تیسری صورت دیکھو) اس صورت میں م برابر ہی ا کے

$$اور ب + ۱ = س$$

ان دونوں برابر میں سے ہر ایک میں ا نکالیا

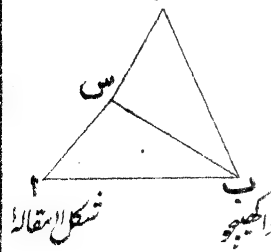
$$اسلئے ب + ۱ \times ۲ = ۱ + س$$

یعنی ب + چھوٹا ہی ۱ + س سے بقدر  $۱ \times ۲ + ۱$

بارہویں اور تیرہویں شکل کے دعوے ایک ہی دعویٰ میں اس طرح بیان ہوئے ہیں کہ مثلث کے ایک ضلع پر کے مربع اور باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کا فرق برابر ہو اس ضلع کے دو سرے کے جو ان دو ضلعوں میں سے کسی ضلع اور اس خط سے بنتی ہو دو میان اس زاویہ کے گرد وہ دونوں ضلع ہیں اور عموماً کے جو اس ضلع پر اسکے سامنے کے زاویہ سے نکالا گیا ہی واقع ہی

اس مقالہ کی بارہویں اور تیرہویں شکلیں اور پہلے مقالہ کی سیٹا لیسویں شکل ترتیباً مثلث منہج الزاویہ اور مثلث طہ الزاویہ اور مثلث قائم الزاویہ کے ضلعوں کے آپس کے علاوہ بیان اور ثابت کرتے ہیں پہلے مقالہ کی سیٹا لیسویں شکل کا عکس اقلیدس نے اس مقالہ کی سیٹا لیسویں شکل میں ثابت کیا ہے لیکن دوسرے مقالہ کی بارہویں اور تیرہویں شکل کا عکس اقلیدس نے نہیں ثابت کیا ہے یہ ہیں کہ اگر مثلث کے کسی ضلع پر کا مربع اسکے باقی دو ضلعوں پر کے

مربعوں سے برابر تو اس ضلع کے سامنے کا زاویہ منفرج ہوگا اور اگر مثلث کے کسی ضلع پر کا مربع اس کے باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں سے چھوٹا ہو تو اس ضلع کے سامنے کا زاویہ حادہ ہوگا اور یکسوں کا ثبوت یہ بھی



فرض کرو کہ اب اس مثلث ہی اگر اب پر کا مربع برابر اس اور سی پر کے مربعوں سے تو زاویہ اس ب منفرج ہی اور اگر چھوٹا ہی آئے تو زاویہ اس ب حادہ ہی

سی سے سی د ضلع ب سی کے ساتھ زاویہ قائمہ بنا تا ہوا کھینچو اور سی د برابر سی ا کے بناؤ

چونکہ زاویہ ب سی د قائمہ ہی

اس لئے ب سی اور سی د پر کے مربع ملکر برابر سی ب د پر کے مربع کے شکل ۲۰ مقابلہ

لیکن ب سی اور سی د پر کے مربع ملکر برابر سی ب سی اور سی ا پر کے مربع کے کیونکہ سی د برابر

سی ا کے بنا یا گیا ہی

اس لئے ب د پر کا مربع برابر ہی ب سی اور سی ا پر کے مربعوں کے

اگر ب ا پر کا مربع برابر ہی ب سی اور سی ا پر کے مربعوں سے تو وہ ب د پر کے مربع سے بھی

برابر ہی اور اگر وہ چھوٹا ہی ب سی اور سی ا پر کے مربعوں سے تو وہ ب د پر کے مربع سے بھی چھوٹا ہی

فرض کرو کہ ب ا پر کا مربع برابر ہی ب سی اور سی ا پر کے مربعوں سے

اس لئے ب ا پر کا مربع برابر ہی ب د پر کے مربع سے

اس لئے ب ا برابر ہی ب د سے

چونکہ مثلث اس ب کے دو ضلع اس اور سی ب الگ الگ برابر ہیں مثلث د سی ب

کے دو ضلعوں د سی اور سی ب کے یعنی اس برابر ہی د سی کے اور سی ب دونوں مثلثوں

میں مشترک ہی لیکن مثلث اس ب کا قاعدہ اب برابر ہی مثلث د سی ب کے قاعدہ د ب سے

اس لئے زاویہ اس ب برابر ہی زاویہ د سی ب سے شکل ۲۰ مقابلہ

لیکن زاویہ دس ب قائمہ ہی

اسلئے زاویہ اس ب منفرد ہی

پھر فرض کرو کہ اب ایک مربع چھوٹا ہی ب س اور س ا پر کے مربعوں سے

اسلئے ب ایک مربع چھوٹا ہی ب د پر کے مربع سے

اسلئے ب ا چھوٹا ہی ب د سے

چو کہ مثلث اس ب کے دو ضلع اس اور س ب الگ الگ برابر ہیں مثلث دس ب کے

دو ضلعوں دس اور س ب کی یعنی اس برابر ہی دس کے اور س ب دونوں مثلثوں میں

مشترک ہی لیکن مثلث اس ب کا قاعدہ اب چھوٹا ہی مثلث دس ب کے قاعدہ دس سے

اسلئے زاویہ اس ب چھوٹا ہی زاویہ س ب سے

لیکن زاویہ دس ب قائمہ ہی

اسلئے زاویہ اس ب حادہ ہی

اسلئے اگر مثلث کے کسی ضلع پر کا مربع الخ - یہی ثابت کرنا تھا

مشق

۱ مثلث اب متساوی الساقین میں اس کے قاعدہ اب پر کسی زاویہ اسے اس کے سامنے کے

ضلع ب س پر عمود ا د ڈالا گیا ہی ثابت کرو کہ اب پر کا مربع دس ب ہی س ب زاویہ کی سطح کا

۲ مثلث اب س کا زاویہ س قائمہ ہی اس کے کسی نقطہ دس سے دی عمود اب پر

ڈالا گیا ہی ثابت کرو کہ اب اور ای کی سطح برابر ہی اس اور ا کی سطح کے

۳ اب س د شکل ذیل سے جس کے ضلع اب اور س د متساوی ہیں ثابت کرو کہ دس

اب د پر کے مربعے ملکر برابر ہیں ا د اب س پر کے مربعوں اور دنی سطح اب اور س د کے

شکل ۳۱ عملی

دیئے ہوئے مستقیم الاضلاع کے برابر مربع بناؤ



ی ج پر کے مربعوں کے

ی ج پر کا مربع جو ان دونوں میں مشترک ہی نکال ڈالو  
اسلئے بی اوری ف کی سطح برابر ہی رہے گی  
لیکن بی اوری ف کی سطح ہی متوازی الاضلاع باد کیونکہ ی ف  
برابر ہی رہے گی

اسلئے باد برابر ہی رہے گی پر کے مربع کے  
لیکن باد برابر استقیم الاضلاع اس کے بنایا گیا ہے  
اسلئے ی ا پر کا مربع برابر ہی مستقیم الاضلاع اس کے  
اسلئے دیے ہوئے مستقیم الاضلاع کے برابر ایک مربع بنایا جائے  
اور اسی کے بنانے کی ضرورت تھی  
نتیجہ یہ کہ اس شکل سے صاف ظاہر ہے کہ اگر کسی دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے اس کے قطر پر عمود ڈالا  
جائے تو اس عمود پر کا مربع برابر ہوگا قطر کے حصوں کی سطح کے جنہیں وہ عمود سے تقسیم ہوا ہے  
مشق

۱ دیے ہوئے مربع کے برابر ایک سطحیں بناؤ جس کا ایک ضلع دیے ہوئے خط مستقیم کے برابر ہو  
دوسرے مقالہ کی شکلوں پر متفرق مشق  
دیے ہوئے مثلث کے کسی ضلع کو اتنا بڑھاؤ کہ اس ضلع اور بڑھے ہوئے حصہ کی سطح برابر  
ہو باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے فرق کے

۲ دیے ہوئے خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ اس خط پر کا مربع اور بڑھے ہوئے حصہ پر کا مربع ملکر دوا  
ہوں اس سطح کے جو کل خط بڑھے ہوئے اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنتی ہے

۳ دیے ہوئے خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ دیے ہوئے خط پر کا مربع اور کل خط بڑھے ہوئے حصہ پر کا  
مربع ملکر دوا ہوں اس سطح کے جو کل خط بڑھے ہوئے اور بڑھے ہوئے حصہ سے بنتی ہے

۴ دیے ہوئے خط مستقیم کو آٹا بڑھاؤ کہ دیے ہوئے خط پر کا مربع برابر ہو سطح کل خط مستقیم بڑھے ہوئے اور حصہ بڑھے ہوئے کے

۵ مثلث کے قاعدہ کے بیچوں بیچ کا نقطہ دیے ہوئے دائرہ کا مرکز بنی اور قاعدہ کے سامنے کا زاویہ محیط کے کسی نقطہ پر ہی ثابت کرو کہ مثلث کے دو ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ ہمیشہ ایک مقدار معینہ مستقل ہوگی

۶ ذواربغ الاضلاع کے وتروں پر کے مربعوں کا مجموعہ دو ناموں کا ان خطوں پر کے مربعوں کا جو ذواربغ الاضلاع کے آگے سامنے کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطوں کو ملاتے ہیں

۷ اُس نقطہ کو جہاں کسی متوازی الاضلاع کے قطر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں مرکز نامزد دائرہ کھینچا جائے ثابت کرو کہ ان خطوں پر کے مربعوں کا مجموعہ جو دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے

متوازی الاضلاع کے چاروں زاویوں تک کھینچے گئے ہیں ہمیشہ ایک مقدار معینہ مستقل ہوگی

۸ کسی دائرہ کے قطرب میں نقطہ میں اوری اُس کے مرکز سے برابر دوری پر ملے جائیں اور محیط کے کسی نقطہ سے اوری دیکھیے جائیں ثابت کرو کہ اوری سے اوری کے پر کے مربع برابر ہیں اس اوراد پر کے مربعوں کے

۹ اگر مثلث اب س کے قاعدہ ب سے پردا ایسا نقطہ ہی کہ اب اور د پر کے مربع برابر ہیں اس اور س د پر کے مربعوں کے تواد کے بیچوں بیچ کا نقطہ ب اور س سے برابر دوری پر

۱۰ اگر مثلث متساوی الساقین کے زاویہ اس سے اُس کے قاعدہ کے کسی نقطہ تک خط کھینچا جائی تو اُس خط پر کا مربع مثلث کی ساق پر کے مربع سے بقدر قاعدہ کے حصوں کی سطح کے چھوٹا ہوگا

۱۱ ایسا مثلث متساوی الساقین منفرج الزاویہ بناؤ کہ زاویہ منفرج کے سامنے کے ضلع پر کا مربع اُسکی ہر ساق پر کے مربع سے بڑھتا ہو

۱۲ اُس مثلث کا زاویہ منفرج دریافت کرو جبکہ زاویہ منفرج کے سامنے کے ضلع پر کا مربع ان ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ سے جو زاویہ منفرج کے گز ہیں بقدر ان ضلعوں کی سطح کے چھوٹا ہوگا

- ۱۳ مربع کے اندر جو سب چھوٹا مربع بنے گا وہ اس مربع کا آدھا ہوگا
- ۱۳ ایک خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ کل خط اور اس کے ایک حصہ پر کے مربعے ملکر دو بے ہوں دوسرے حصہ پر کے مربع کے
- ۱۵ دو متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کی رتبے آپس میں برابر ہیں اور ان کے ضلعوں کے مجموعہ بھی آپس میں برابر ہیں ثابت کرو کہ سب طرح سے آپس میں برابر ہیں
- ۱۶ اب سی دو متوازی الاضلاع قائم الزاویہ سی اور ع ایسا نقطہ ہی کہ ع اور ع سی کا مجموعہ برابر ہی ع ب اور ع د کے مجموعہ کے ثابت کرو کہ ع کا مقام ان نقاط وہ دو خط مستقیم میں جو متوازی الاضلاع کے مرکز سے اس کے ضلعوں کے متوازی کیجئے گئے ہیں
- ۱۷ اگر مثلث کے ضلعوں کے بیچوں بیچ کے نقطہ سے ان کے سامنے کے زاویوں تک خط مستقیم کھینچ جائیں تو ان خطوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کا جو گنا برابر ہوگا مثلث کے ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے گننے کے
- ۱۸ اب سی مثلث متساوی الاضلاع ہی اور ا د ا و بی ضلعوں ب سی اور اس پر عمود ہیں اور ایک دوسرے کو نقطہ ف پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ اب پر کا مربع گنا ہی ا د پر کے مربع کا
- ۱۹ اب سی د ایک متوازی الاضلاع ہی اگر قطر اس پر برابر ہو اب کے تو قطر اس پر کا مربع چھوٹا ہوگا قطر ب د پر کے مربع سے بقدر ب سی پر کے مربع کے دو بے گئے
- ۲۰ ایک خط مستقیم کو اتنا بڑھاؤ کہ سطح کل خط مستقیم بڑھے ہوئے اور کسی دوسرے دیے ہوئے خط مستقیم کی برابر ہو بڑھے ہوئے حصہ پر کے مربع کے نقطہ



منصوب کے مطابق تحریقیہ کے پہلے اور دوسرے مقالہ کی شکلوں کی کثیر

## شکل اثباتی

زاویے جو مستقیم خطوط کے آپس میں ملنے سے بنتے ہیں

نمبر شکل	مقدم	ثالی
۱۱	اگر دو خط ایسے ہیں کہ وہ مستقیم ہیں	اُن کا کوئی حصہ مشترک نہیں ہو سکتا
۱۳	اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر	یہ دو زاویے یا تو دو قائمے ہوں گے یا مکمل درجہ
	کھڑا ہو کر دو زاویے بنا دے	قائموں کے برابر ہوں گے
۱۴	اگر دو خط مستقیم کسی خط مستقیم کی آسنے	یہ دونوں خط مستقیم ایک ہی خط مستقیم
	سامنے کی طرفوں سے اگر اُس سے ایک ہی	یعنی ایک ہی سیدھ میں ہوں گے
	نقطہ پر ملیں اور زاویے منصفیہ برابر دو قائموں	
	کے بنا دیں	
۱۵	اگر دو خط مستقیم آپس میں کسی نقطہ پر کاٹیں	چار زاویے جو اُس نقطہ پر بنیں گے ملکر
۱۶	اگر دو خط مستقیم آپس میں کسی نقطہ پر کاٹیں	برابر چار قائموں کے ہوں گے
۱۷	اگر دو خط مستقیم آپس میں کسی نقطہ پر کاٹیں	زاویے متقابلہ آپس میں برابر ہوں گے
۱۸	اگر دو خط مستقیم آپس میں کسی نقطہ پر کاٹیں	یہاں خط مستقیم آپس میں خط مستقیم کی سی
	متقابلہ برابر بنا دیں	میں ہو گا اور دوسرا جو تھے کی
۱۹	اگر کوئی خط مستقیم کسی خط مستقیم کی ایک طرف	اُس نقطہ پر کے سب زاویے ملکر دو قائموں
	سے اگر اُس کے کسی نقطہ پر جو اُس کے سرے کا	کے برابر ہوں گے
	نقطہ نہیں ہی ملیں اور زاویے بنا دیں	

مربع شکل

مستقیم

ثانی

اگر ایک نقطہ سے کئی خط مستقیم نکلیں  
زاویے جو ان خطوں سے اُس نقطہ پر ہیں

ملکر برابر جائز قائلوں کے ہوں گے

## متوازی خط مستقیم

اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم پر ایک  
یہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوں گے

ہی سطح میں ہیں اگر زاویے متبادلہ برابر بنائے

اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم پر  
یہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوں گے

ایک ہی سطح میں ہیں اگر زاویہ خارجہ اسکے

سامنے کے زاویہ داخلہ کے برابر بنائے

اگر ایک خط مستقیم کسی دو خط مستقیم پر ایک  
یہ دونوں خط مستقیم متوازی ہوں گے

ہی سطح میں ہیں اگر کرائی ایک طرف کے دو زاویے

داخلہ ایسے بنائے کہ وہ ملکر دو قائلوں کے برابر ہوں

اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر گرے  
وہ خط اسکے ساتھ زاویے متبادلہ برابر بنائیں گے

اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر  
وہ اپنی ایک طرف کا زاویہ خارجہ اور اسکے

سامنے کا زاویہ داخلہ ایک دوسرے کے برابر بنائیں گے

اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خط مستقیم پر  
وہ اپنی ایک طرف کے دو زاویہ داخلہ ایسے بنائیں گے کہ وہ

ملکر دو قائلوں کے برابر ہوں گے

اگر دو خط مستقیم ہر سے ہر ایک کسی تیسرے  
وہ دونوں خط مستقیم آپس میں بھی متوازی

خط مستقیم کا متوازی ہوں گے

اگر دو خط مستقیم کسی دو برابر اور متوازی خط  
وہ دونوں خط مستقیم آپس میں بھی برابر اور

مستقیم کے ایک انظر کے سرور کو ملائیں  
متوازی ہوں گے

ثانی

مقدم

## مثلثوں کو برابری کے لئے متقابلہ کرنا

اگر دو مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے ایک ہی  
طرف میں ہوں

قاعدہ کے ایک سر پر ہوں آپس میں برابر ہوں  
اور وہ ضلع بھی جنکے سرے قاعدہ کے دوسرے

سرے پر ہوں آپس میں برابر ہوں

اس مثلث کا تیسرا زاویہ بھی دوسرے مثلث  
کے تیسرے زاویہ کے برابر ہوگا

اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث  
کے دو زاویوں کے برابر ہوں

اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث  
کے دو زاویوں کے الگ الگ برابر ہوں

اور ایک ایک ضلع بھی ان مثلثوں کا برابر ہو خواہ  
یہ ضلع برابر زاویوں کے درمیان کے ہوں

یا ان کے سامنے کے ہوں

قاعدوں کے سامنے کے زاویہ آپس میں برابر ہوں  
اور برابر برابر ضلعوں کے سامنے کے زاویے بھی آپس میں

برابر ہوں گے اور دو مثلث بھی آپس میں برابر ہوں گے  
بڑے قاعدہ کے سامنے کا زاویہ چھوٹے قاعدہ کے

سامنے کے زاویہ سے بڑا ہوگا  
مثلثوں کے قاعدے آپس میں برابر ہوں گے اور قاعدوں

پر کے زاویے جنکے سامنے برابر ضلع ہیں آپس میں  
برابر ہوں گے اور مثلث برابر ہوں گے

اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلع  
کے الگ الگ برابر ہوں اور ان کے قاعدے بھی آپس میں

برابر ہوں  
اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلع  
برابر ہوں لیکن ایک مثلث کا قاعدہ دوسرے مثلث کا قاعدہ بڑا ہو

اگر ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلع  
کے الگ الگ برابر ہوں اور ان ضلعوں سے پہلے

زاویہ بھی آپس میں برابر ہوں

نمبر شکل	مقدم	ثالی
۲۴	اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے الگ الگ برابر ہوں لیکن ایک مثلث کے ان ضلعوں سے بنا ہوا زاویہ دوسرے مثلث کے ضلعوں سے بنے ہوئے زاویہ سے بڑا ہو	بڑے زاویہ کے سامنے کا قاعدہ چھوٹے زاویہ کے سامنے کے قاعدے بڑا ہوگا
۳۷	اگر مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں	ان مثلثوں کے رقبے برابر ہوں گے
۳۸	اگر مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں	ان مثلثوں کے رقبے برابر ہوں گے
۳۹	اگر برابر مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور اسکے ایک ہی طرف میں ہوں	وہ مثلث ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں گے
۴۰	اگر برابر مثلث ایک ہی خط مستقیم کے برابر قاعدوں پر اور ان کے ایک ہی طرف ہوں	وہ مثلث ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں گے
۴۱ و ۴۲	اگر برابر مثلث ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہیں	وہ مثلث ایک ہی قاعدہ یا برابر قاعدوں کے درمیان ہوں گے
۴۰	اگر دو خط مستقیم کسی مثلث کے دو ضلعے ہیں	وہ دونوں خط ملکر مثلث کے تیسرے ضلع سے بڑا ہوگا
۴۱	اگر دو زاویے کسی مثلث کے دو زاویے ہیں	دو زاویے ملکر دو قانونوں سے کم ہوں گے
۴۲ و ۴۳	اگر تین زاویے کسی مثلث کے تین زاویے داخلہ ہیں	وہ سب نیا ہی ملکر دو قانونوں کے برابر ہوں گے
۴۲	اگر مثلث کا ایک زاویہ باقی دو زاویوں کے برابر ہو	وہ زاویہ قائم ہوگا
ایضاً	اگر مثلث کا ایک زاویہ قائم ہو	اس کے باقی دو زاویے ملکر ایک قائمہ کے برابر ہوں گے

نمبر شکل	مقدم	ثانی
۱۲ نتیجہ صریح	اگر مثلث کے دو زاویے ملکر اُسکے تیسرے زاویہ سے بڑے ہیں	تیسرا زاویہ حادہ ہی
ایضاً	اگر مثلث کے دو زاویے ملکر اُسکے تیسرے زاویہ سے کم ہیں	تیسرا زاویہ منفرجہ ہی
۶	اگر کسی مثلث کے دو زاویے آپس میں برابر ہیں	اُن زاویوں کے سامنے کے ضلع بھی آپس میں برابر ہوں گے
۱۹	اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ اُسکے دوسرے زاویہ سے بڑا ہی	بڑے زاویہ کے سامنے کا ضلع چھوٹے زاویہ کے سامنے کے ضلع سے بڑا ہوگا
۵	اگر مثلث متساوی الساقین ہی اور اگر برابر ضلع بڑھائے جائیں	اُسکے قاعدہ پر کے زاویے آپس میں برابر ہو گئے قاعدہ کے نیچے کے زاویے آپس میں برابر ہو گئے
۱۲ نتیجہ صریح	اگر مثلث قائم الزاویہ متساوی الساقین ہی	قاعدہ پر کا ہر ایک زاویہ آدھا قائمہ ہوگا
۱۸	اگر کسی مثلث کا ایک ضلع اُسکے دوسرے ضلع سے بڑا ہی	بڑے ضلع کے سامنے کا زاویہ چھوٹے ضلع کے سامنے کے زاویہ سے بڑا ہوگا
۱۲ نتیجہ صریح	اگر مثلث متساوی الاضلاع ہی	وہ مثلث متساوی الزوا یا بھی ہوگا
۱۲ نتیجہ صریح	اگر مثلث متساوی الاضلاع ہی	اُسکا ہر ایک زاویہ ایک قائمہ کا دو تہائی ہی ہوگا
۱۹	اگر مثلث متساوی الزوا یا ہی	وہ مثلث متساوی الاضلاع بھی ہوگا
۱۲ نتیجہ صریح	اگر مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے	زاویہ خارجہ اپنے سامنے کے دونوں زاویوں داخلہ سے بڑا ہوگا

نمبر شکل

مقدم

اگر مثلث قائم الراویہ ہی

۴۷

ثانی

مربع جو زاویہ قائم کے سامنے کے ضلع پر بنایا جائے  
برابر ہوگا ان مربعوں کے جو باقی دو ضلعوں کے بنا جائیں گے

اگر مثلث کے ایک ضلع پر بنایا ہو مربع برابر ہو ان  
مربعوں کے جو باقی دو ضلعوں کے بنا گئے ہیں

۴۸

اگر مثلث کے کسی ضلع پر بنایا ہو مربع برابر باقی  
دو ضلعوں پر بنائے ہوئے مربعوں کے مجموعہ سے

۱۲ مقالہ عکس

اگر مثلث کے کسی ضلع پر بنایا ہو مربع چھوٹا باقی  
دو ضلعوں پر بنائے ہوئے مربعوں کے مجموعہ سے

۱۳ مقالہ عکس

### خط استقیم جو مثلث کے اندر کھینچے جائیں

اگر مثلث کے کسی ضلع کے چوں بیچ کے نقطہ  
سے اس ضلع کے سامنے کے زاویہ قائم کھینچا جائے

۸ نتیجہ صریح

اگر مثلث کے قاعدہ کے سروں سے دو خط  
مستقیم کسی نقطہ تک جو مثلث کے اندر کھینچے

۱۱

جائیں

ہو اور زاویہ اس زاویہ سے بڑا ہوگا جو ان ضلعوں  
سے بنا ہی

سے بنا ہی

زاویہ متفرجہ کے سامنے کے ضلع پر کا مربع برابر ہوگا  
باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ بقدر اس سطح کے دو

اگر مثلث کے ان ضلعوں میں سے جو زاویہ متفرجہ کے  
گرد ہیں کسی ضلع پر بڑے ہوئی برائے کے سامنے کے

۱۳ مقالہ

کے جو اس ضلع سے جس پر دو گر گیا ہی اور اس کے اس سے  
ہو حصہ جو دریا زاویہ متفرجہ اور دو کے واقع کر رہی ہے

زاویہ سے عمود گرایا جائے

نمبر شکل	مقدمہ	تالی
۱۳ مقالہ ۲	اگر مثلث کے اُن ضلعوں میں سے جو زاویہ جاوہ کے گرد ہیں کسی ضلع پر یا اُس ضلع پر چھے ہو پر اس کے سامنے کے زاویہ سے عمود گرایا جائے	اُس زاویہ جاوہ کے سامنے کے ضلع پر یا اُس ضلع پر چھے ہو پر اس کے گرد ہونے کے واسطے کہ دو ضلعوں کے درمیان کے مجموعہ سے اُس ضلع کے دوہرے کے جو اُس ضلع سے جس پر عمود گرایا گیا ہے اور اُس خط سے جو اُس زاویہ جاوہ اور عمود کے درمیان واقع ہے قیاسی ہو
متوازی الاضلاع اور مثلث کا مقابلہ		
۳۱	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں
انہی تین صریح	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث برابر قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں
۳۲ عکس	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر ایک ہی خط سے قیاس کے برابر قاعدوں پر ہوں اور متوازی الاضلاع اور مثلث سے دونوں	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر ایک ہی خط سے قیاس کے برابر قاعدوں پر ہوں اور متوازی الاضلاع اور مثلث سے دونوں
۳۳ عکس	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں اور متوازی الاضلاع اور مثلث سے دونوں	اگر متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں اور متوازی الاضلاع اور مثلث سے دونوں
متوازی الاضلاع کو برابری کے لئے مقابلہ کرنا		
۳۴	اگر متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں	اگر متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان ہوں
۳۵	اگر برابر متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ پر اور اس کے ایک ہی طرف میں ہوں	اگر برابر متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ پر اور اس کے ایک ہی طرف میں ہوں

نمبر شکل

۳۶

مقدم

اگر متوازی الاضلاع برابر قاعدوں پر ہو

ایک ہی متوازی خطوں کے درمیان ہوں

اگر برابر متوازی الاضلاع ایک ہی خط تقسیم

کے برابر قاعدوں پر ایک ہی طرف

میں ہوں

اگر برابر متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی

خطوں کے درمیان ہوں

تالی

وہ متوازی الاضلاع آپس میں برابر ہوں گی

وہ متوازی الاضلاع ایک ہی متوازی

خطوں کے درمیان ہوں گی

وہ متوازی الاضلاع یا تو ایک ہی قاعدہ برابر

قاعدوں پر ہوں گی

خطوں کے درمیان ہوں

اگر برابر متوازی الاضلاع

ایک ہی متوازی

خطوں کے درمیان ہوں

وہ دو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوں گی

وہ دو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع

ہوں گی

نہ وہ دو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع

ہوں گی

اُس کے آئنے سامنے کے ضلع آپس میں برابر ہوں گے

اور اُس کے آئنے سامنے کے اوپے آپس میں برابر ہوں گے

اور اُس کا ہر قطر اُس کی سطح کے دو برابر حصے کرے گا

اُس کے سب زاویے قائم ہوں گے

اُن کے تمام برابر ہوں گے

اگر کسی ذوالربعۃ الاضلاع کے آئنے سامنے کے ضلع برابر ہوں

اگر کسی ذوالربعۃ الاضلاع کے آئنے سامنے کے

زاویے برابر ہوں

اگر کسی ذوالربعۃ الاضلاع کا ہر ایک قطر اُس کی

سطح کے دو برابر حصے کرے

اگر کوئی شکل متوازی الاضلاع ہو

اگر متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائم ہو

اگر کسی متوازی الاضلاع کے قطر کے گوشہ اور

متوازی الاضلاع میں

۳۷ عکس

۳۸ عکس

۳۹ عکس

۴۰ عکس

۴۱ عکس

۴۲ عکس

۴۳ عکس

۴۴ عکس



نمبر شکل

مقدم  
تفاحم الراویوں کے مقابلہ جو خط استقیم کے حصوں سے بنتے ہیں

۲ مقالہ ۲ اگر کوئی خط مستقیم دو حصوں میں تقسیم ہوا ہے

سطحیں مکمل خط مستقیم اور اسکے برابر حصہ

کی ملکر برابر ہیں مکمل خط مستقیم کے مربع کے

برابر ہے اس حصہ کے مربع کے اور دونوں

حصہ کی سطح کے

۳ مقالہ ۳ اگر کوئی خط مستقیم دو حصوں میں تقسیم ہوا ہے

مکمل خط مستقیم کے مربع برابر ہے دونوں حصوں

بر کے مربعوں کے اور ان حصوں کی سطح کے دو حصوں

کے مجموعہ کے

۴ مقالہ ۴ اگر کوئی خط مستقیم دو حصوں میں تقسیم ہوا ہے

مکمل خط مستقیم اور اسکے ایک حصہ کی سطح کا چوتھا

اور دوسرے حصہ کے مربع برابر ہیں اس خط پر کے

مربع کے جو خط مستقیم اور پہلے حصہ سے بننا ہے

۵ مقالہ ۵ اگر کوئی خط مستقیم دو برابر اور دو برابر حصوں

میں تقسیم ہوا ہے

سطح دونوں برابر حصوں کی اور اس خط پر کے

مربع جو تقسیم کے نقطوں کے درمیان واقع ہے ملکر

برابر ہیں خط مستقیم کے آدھے پر کے مربع کے

دونوں برابر حصوں کے مربع ملکر دو حصوں میں خط مستقیم

کے آدھے اور اس خط پر کے مربعوں سے تقسیم

۶ مقالہ ۶ اگر کوئی خط مستقیم دو برابر اور دو برابر حصوں

میں تقسیم ہوا ہے

کے نقطوں کے درمیان ہے

<p>تالی</p>	<p>مقدم</p>	<p>نمبر شکل</p>
<p>کل خط مستقیم ٹہرتے ہوئے اور ٹہرتے ہوئے حصہ کی سطح اور خط مستقیم کے آدھے بنکا مربع ملکر برابر اس خط پر کے مربع کے جو خط مستقیم کے آدھے اور ٹہرتے ہوئے حصہ سے بنتا ہے</p>	<p>اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصوں میں تقسیم ہوا ہی اور کسی نقطہ تک بڑھایا گیا ہے</p>	<p>۱۰ مقالہ ۲</p>
<p>کل خط مستقیم ٹہرتے ہوئے براؤں ٹہرتے ہوئے حصہ پر کے مربع ملکر دو نئے خط مستقیم آدھے براؤں اس خط پر کے مربعوں سے جو آدھے خط اور ٹہرتے ہوئے حصہ سے بنتا ہے۔</p>	<p>اگر کوئی خط مستقیم دو برابر حصوں میں تقسیم ہوا اور کسی نقطہ تک بڑھایا گیا ہے</p>	<p>۱۰ مقالہ ۲</p>
<p>دو خط مستقیم کی سطح برابر ہی ان سب سطحوں کے مجموعہ کے جو کل خط غیر متقسم اور ہر ایک حصہ خط متقسم سے بنتی ہیں</p>	<p>اگر دو خط مستقیم میں سے ایک کئی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے</p>	<p>۱۰ مقالہ ۲</p>
<p>اُس کے سب زاویے داخلہ اور خارجہ قائلے ملکر اتنے قائموں کے برابر ہوں گے جو گنتی میں اُس کے ضلعوں کی تعداد سے دوئے ہوں گے</p>	<p>کثیر الاضلاع</p>	<p>۱۰ مقالہ ۲</p>
<p>سب زاویے خارجہ جو ضلعوں کے بڑھانے سے نہیں گئے ملکر چار قائموں کے برابر ہوں گے</p>	<p>اگر کسی مستقیم الاضلاع کے سب ضلع ایک دوسرے کے بعد ایک ہی سمت میں بڑھائے جائیں</p>	<p>۱۰ مقالہ ۲</p>

# شکل عملی خط مستقیم

معلوم	مطلوب	نمبر شکل
ایک محدود خط مستقیم اور ایک نقطہ	اس خط سے اس نقطہ کے برابر ایک خط کھینچنا	۲
ایک خط مستقیم اور ایک نقطہ	اس نقطہ سے اس خط مستقیم کا موازی	۳۱
دو چھوٹے بڑے خط مستقیم	ایک خط مستقیم کھینچنا	۳
ایک خط مستقیم	اس خط سے دو برابر حصے کرنا	۱۰
ایک خط مستقیم	اس خط مستقیم کے ایسے دو حصے کرنا کہ سطح	۱۱ مقالہ ۲
	اس خط مستقیم اور ایک حصے کے برابر دوسرے	
	حصے پر کے برابر کے	
<b>زاویہ مسطحہ مستقیمہ الخطين</b>		
ایک زاویہ مسطحہ مستقیمہ الخطين اور ایک	اس خط کے اس نقطہ پر اس زاویہ کے برابر	۳۳
خط مستقیم اور اس میں ایک نقطہ	ایک زاویہ بنانا	
ایک زاویہ مسطحہ مستقیمہ الخطين	اس زاویہ کے دو برابر حصے کرنا	۹
ایک خط مستقیم اور اس میں ایک نقطہ	اس نقطہ سے ایک ایسا خط کھینچنا کہ وہ اس	۱۱
	خط کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائے	
ایک غیر محدود خط مستقیم اور اس کے باہر ایک نقطہ	اس نقطہ سے اس خط پر ایک عمود ڈالنا	۱۲
<b>مثلث</b>		
تین خط مستقیم جن میں سے ہر ایک دوسرے	ایسا مثلث بنانا کہ اس کے ضلع ان خطوط	۱۴
تیسرے سے بڑے ہیں	کے الگ الگ برابر ہوں	

نمبر شکل	معلوم	مطلوب
۱	ایک محدود خط مستقیم	اس پر مثلث متساوی الاضلاع بنانا
	متوازی الاضلاع	
۴۲	ایک مثلث اور ایک زاویہ سطح مستقیم	مثلث کے برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بنانی کہ اس کا ایک زاویہ اس زاویہ کے برابر ہو
	ان خطین	
۴۳	ایک خط مستقیم اور ایک مثلث اور ایک زاویہ سطح مستقیم	اس خط پر مثلث کے برابر ایک ایسی متوازی الاضلاع بنانی جس کا ایک زاویہ اس زاویہ کے برابر ہو
	ان خطین	
۴۴	ایک مستقیم الاضلاع اور ایک زاویہ سطح مستقیم	اس مستقیم الاضلاع کی برابر ایسی متوازی الاضلاع بنانی کہ اس کا ایک زاویہ اس زاویہ کے برابر ہو
	مستقیم ان خطین	
۴۵	ایک خط مستقیم اور ایک مستقیم الاضلاع اور ایک زاویہ سطح مستقیم	اس خط پر اس مستقیم الاضلاع کی برابر ایسی متوازی الاضلاع بنانی کہ اس کا ایک زاویہ اس زاویہ کے برابر ہو
۴۶	ایک محدود خط مستقیم	اس خط پر مربع بنانا
۴۷	ایک مثلث مستقیم الاضلاع	اس کے برابر ایک مربع بنانا

ہم تجویز

ایک محدود خط مستقیم

ایک مثلث مستقیم الاضلاع

۱۳ مقالہ



# اطلاع ضروری

جو کہ اضلاع ممالک مغربی و شمالی داودہ و نیز پنجاب میں انجمن کے نئی تنظیمات یعنی حساب  
کی کتاب ایسی دیکھنے میں نہیں آئی کہ جس سے ٹڈل کلاس و نیکو لرا و رنگو و نیکو لرا و ٹوگر  
و قانوگونی کے امیدواروں کو امتحان میں کافی مدد دے۔ جو نسخے اس علم کے مروج  
ہیں اُن سے نہ تو منشاء گورنمنٹ کا نکلتا ہے اور نہ روزمرہ کی کارروائی میں کوئی مدد ملتی  
ہے۔ مروجہ نسخوں میں اکثر ایک ایک قاعدہ کی بہت سی مثالیں بھر کر ضخامت بڑھا دی گئی  
ہے۔ جس کے سبب سے قیمت زیادہ ہو گئی ہے لیکن روزمرہ کی کارآمد باتیں جو اس ملک کے  
چلن کے متعلق ہیں انہیں بہت کم پائی جاتی ہیں قاعدوں کی ترتیب بھی عمدہ طور پر نہیں  
ہے۔ پس حسب الارشاد اجابوں کے جو مفاد ملک پر مبنی ہے میں یہہ چاہتا ہوں کہ ایک  
نسخہ آسان اور مختصر اس قسم کا اپنے موطنوں کے روز بروز پیش کروں جس میں ترتیب قاعدوں  
کی عمدہ ہو اور روزمرہ کی کارروائی کے متعلق بہت سی باتیں آجائیں اور اس علم کے  
متعلق ایسے چٹکلے درج ہوں جسے حساب کے سوال بہت جلد حل ہو سکیں اور قیمت  
بھی اس نسخہ کی بمقابلہ اور نسخوں کے بہت کم ہو۔ چنانچہ اسکا لکھنا شروع کر دیا ہے  
اور اسکا پہلا حصہ ڈیڑھ مہینے یعنی اپریل کے شروع میں چھپ کر تیار ہو جاوے گا جن  
صاحبوں کو اسکی خریداری منظور ہو مجھ کو اطلاع دیں تاکہ تیار ہوتے ہی انکی خدمت میں  
بھیج دیا جاوے فقط

تمہارا رام

ہیڈ ماسٹر گورنمنٹ ہائی اسکول متھرا







